PREVIEW QUESTION BANK(Dual)

Module Name : MATHEMATICAL SCIENCES - 704
Exam Date : 02-Mar-2025 Batch : 09:00-12:00

Sr. No.	Client Question ID	Question Body and Alternatives	Marks	Ne M
Objective Question				
1	705101	A monkey covers exactly 10 m on ground in each jump. What is the least number of jumps required to reach a distance 1 m away from where the monkey jumps first? 1. 1 2. 2 3. 3 4. 9 एक बंदर, प्रत्येक कूद में भूमि पर ठीक 10 मीटर की दूरी तय करता है। जहां से बंदर ने पहली कूद मारी वहां से एक मीटर की दूरी तक पहुंचने में कूदों की न्यूनतम संख्या क्या होगी? 1. 1 2. 2 3. 3 4. 9 A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		
Objective Question				
2	705102	Cube root of 0.0125% is closest to 1. 0.005% 2. 0.05% 3. 0.5% 4. 5% 0.0125% का घनमूल किसके निकटतम होगा 1. 0.005% 2. 0.05% 3. 0.5% 4. 5%		

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

3 705103

How many 5-digit numbers, using 0 to 9, can be generated such that ‘123’ appears as a string and no digit appears more than once?

1. 228
2. 108
3. 156
4. 114

5-अंकों की कितनी संख्याएं, 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके, सृजित की जा सकती हैं जिसमें ‘123’ एक शृंखला में रहें और कोई भी अंक एक बार से अधिक न आए?

1. 228
2. 108
3. 156
4. 114

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

4 705104

The diagrams show two orientations of a die having numbers 1 to 6 written on different faces. The number on the face opposite the face showing 3

1. is 2
2. is 1
3. is 6
4. cannot be determined from the given data

नीचे दिए गए चित्र में एक पासे के दो विन्यास दिखाये गये हैं जिसके विभिन्न सतहों पर 1 से 6 तक की संख्या लिखी गई है। संख्या 3 को प्रदर्शित करने वाली सतह के ठीक विपरीत दिशा में कौन सी संख्या है:

1. 2
2. 1
3. 6
4. दिए गए आंकड़ों से निर्धारित नहीं हो सकता

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

5 705105

There are four containers of equal height, whose bases are a circle, a square, a rectangle and an equilateral triangle having the same area. Which one of the following statements about these containers is true?

1. Their volumes are equal.
2. Volume of the rectangular container is larger than that of the square container.
3. Volume of the triangular container is smaller than that of the square container.
4. Volume of the square container is larger than that of the circular container.

बराबर ऊंचाई के ऐसे चार पात्र हैं जिनके आधार वृत्ताकार, वर्गाकार, आयताकार और समबाहु त्रिभुजाकार हैं तथा उनका क्षेत्रफल भी समान है। इन पात्रों के बारे में निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

1. उनका आयतन बराबर है
2. आयताकार पात्र का आयतन वर्गाकार पात्र के आयतन से अधिक है
3. त्रिभुजाकार पात्र का आयतन, वर्गाकार पात्र के आयतन से कम है
4. वर्गाकार पात्र का आयतन, वृत्ताकार पात्र के आयतन से अधिक है

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

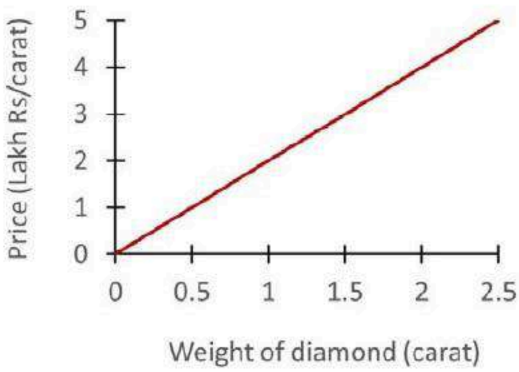
A4: 4

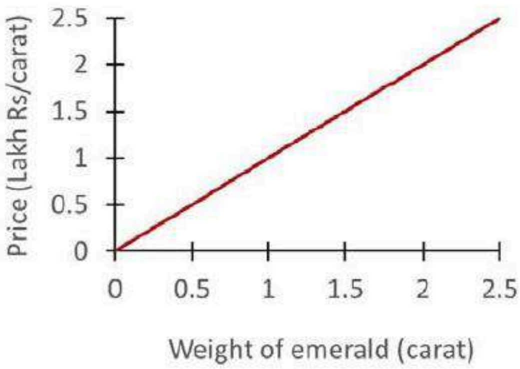
4

Objective Question

6	705106

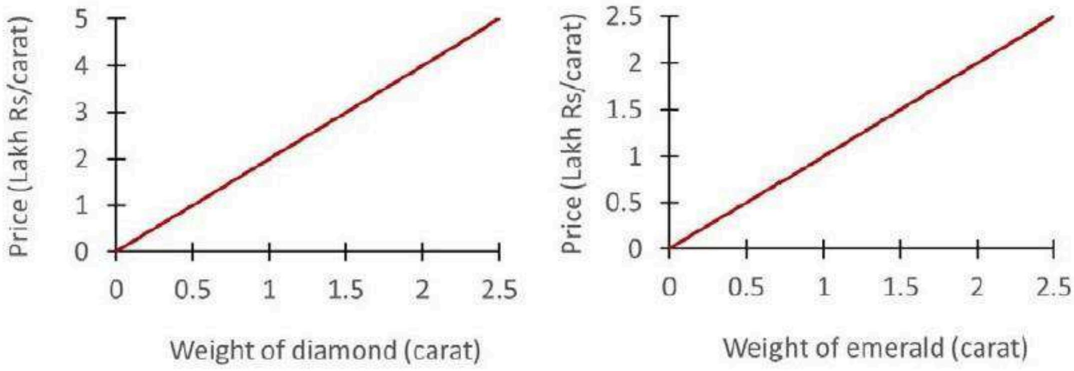
The diagrams show the rates of diamond and emerald in a range of sizes. A person wants to buy a diamond and an emerald of identical size for a total of Rs.6,75,000/-. What is that size?





1. 1 carat
2. 1.5 carat
3. 2 carat
4. 2.5 carat

नीचे दिए गए चित्र में हीरे और पन्ना के विभिन्न आकारों की दर प्रदर्शित की गई है। एक व्यक्ति कुल रु. 6,75,000/- से समान आकार का एक हीरा और एक पन्ना खरीदना चाहता है। वह आकार क्या होगा?



1. 1 carat
2. 1.5 carat
3. 2 carat
4. 2.5 carat

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

7 705107

If A is B's daughter, B is C's brother and D is C's father, then what is A to D?

1. Grandfather
2. Grandmother
3. Grandson
4. Granddaughter

यदि A, B की पुत्री है; B, C का भाई है और D, C का पिता है तो A, D का/की कौन है?

1. दादा
2. दादी
3. पोता
4. पोती

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

8 705108

A block of marble 4 m $\times$ 3 m $\times$ 2 m in size is cut into square tiles of 1 m side having thickness of 10 cm. Assuming there is no wastage in cutting, how many tiles will be made?

1. 120
2. 240
3. 360
4. 480

एक 4 मीटर $\times$ 3 मीटर $\times$ 2 मीटर आकार के संगमरमर ब्लॉक को 10 सेंमी मोटाई वाले 1 मीटर भुजा के वर्गाकार टाइलों में काटा गया। यह मानते हुए कि कटिंग के दौरान कोई बर्बादी नहीं हुई इससे कितनी टाइलें बनाई जा सकेंगी?

1. 120
2. 240
3. 360
4. 480

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

9 705109

A lady walks one-tenth of the total distance at 3 km/h, one-sixth she runs at 5 km/h, one-fifth at 6 km/h, and covers the remaining 16 km at 16 km/h by cycle. What is the total distance?

1. 14 km
2. 16 km
3. 24 km
4. 30 km

एक महिला कुल दूरी का 1/10 भाग 3 किमी/घंटा की गति से चलकर तय करती है, 1/6 भाग को वह 5 किमी/घंटा तथा 1/5 भाग को 6 किमी/घंटा की गति से दौड़कर तथा शेष 16 किमी की दूरी को 16 किमी/घंटा की दर से साइकिल से तय करती है। उसके द्वारा तय की गई कुल दूरी क्या है?

1. 14 किमी
2. 16 किमी
3. 24 किमी
4. 30 किमी

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

10 705110

An OTP is made of six digits using 0 to 9. If three digits and their positions are known, what is the probability (in percentage) of discovering the full pin within 100 trials?

1. 10%
2. 20%
3. 30%
4. 40%

एक 6-अंकीय ओटीपी को 0 से 9 अंकों के प्रयोग से बनाया गया है। यदि तीन अंक और उनकी स्थिति ज्ञात हो तो 100 ट्रॉयलों में इस ओटीपी को पूरी तरह से पता करने की प्रायिकता क्या होगी?

1. 10%
2. 20%
3. 30%
4. 40%

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

11 705111

Ramesh is taller than Rajesh but not taller than Rupesh. Suresh's height is the average of the heights of Naresh and Rajesh. If Rajesh is taller than Naresh then who is the shortest among them?

1. Suresh
2. Naresh
3. Rupesh
4. Cannot be determined

रमेश, लंबाई में राजेश से अधिक लंबा है लेकिन रूपेश से लंबा नहीं है। सुरेश की ऊंचाई नरेश और राजेश की औसत ऊंचाई के बराबर है। यदि राजेश, नरेश से अधिक लंबा है तो सबसे छोटा कौन है?

1. सुरेश
2. नरेश
3. रूपेश
4. निर्धारण नहीं किया जा सकता

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

12 705112

The value of $(1 - \frac{1}{2025})(1 - \frac{1}{2024})(1 - \frac{1}{2023})\ldots(1 - \frac{1}{2001})$ is

1. $(1 - \frac{1}{79})$
2. $(1 - \frac{1}{80})$
3. $(1 - \frac{1}{81})$
4. $(1 - \frac{1}{82})$

$(1 - \frac{1}{2025})(1 - \frac{1}{2024})(1 - \frac{1}{2023})\ldots(1 - \frac{1}{2001})$ का मान है

1. $(1 - \frac{1}{79})$
2. $(1 - \frac{1}{80})$
3. $(1 - \frac{1}{81})$
4. $(1 - \frac{1}{82})$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

13 705113

One side and one diagonal of a rhombus are 13 cm and 24 cm, respectively. Then the area of the rhombus is

1. 90 cm^2
2. 100 cm^2
3. 110 cm^2
4. 120 cm^2

एक समचतुर्भुज की एक भुजा और एक विकर्ण क्रमश: 13 सेंमी और 24 सेंमी है। तो इस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल होगा:

1. 90 वर्ग सेमी
2. 100 वर्ग सेमी
3. 110 वर्ग सेमी
4. 120 वर्ग सेमी

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

14 705114

Two fair dice are thrown at random independently. What is the probability that the average of the values on their upper faces is 4?

1. 5/36
2. 1/6
3. 7/36
4. 2/9

दो निष्पक्ष पासों को यादृच्छिक एवं स्वतंत्र रूप से फेंका गया। उनके ऊपरी सतह के औसत मान के 4 होने की प्रायिकता क्या होगी?

1. 5/36
2. 1/6
3. 7/36
4. 2/9

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

15 705115

The square of the geometric mean of two positive integers is 30. The smallest possible sum of the two integers is

1. 10
2. 11
3. 13
4. 17

दो धनात्मक पूर्णांकों के गुणोत्तर माध्य का वर्ग 30 है। उन दो पूर्णांकों का संभावित न्यूनतम योगफल क्या होगा?

1. 10
2. 11
3. 13
4. 17

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4: 4

4

Objective Question

16 705116

An electric heater uses approximately 1 KWH for increasing temperature of 1 L water by 1°C. If the heating element has a rating of 10 KW, what is the time taken to raise the temperature of 1 L water by 1 °C?

1. 1 hour
2. 15 mins
3. 10 mins
4. 6 mins

एक इलेक्ट्रिक हीटर, 1 लीटर पानी का तापमान 1°C बढ़ाने के लिए लगभग 1 KWH बिजली का उपयोग करता है। यदि इसके हीटिंग एलीमेंट की रेटिंग 10 KW है तो 1 लीटर पानी का तापमान 1 °C बढ़ाने के लिए कितना समय लगेगा?

1. 1 घंटा
2. 15 मिनट
3. 10 मिनट
4. 6 मिनट

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

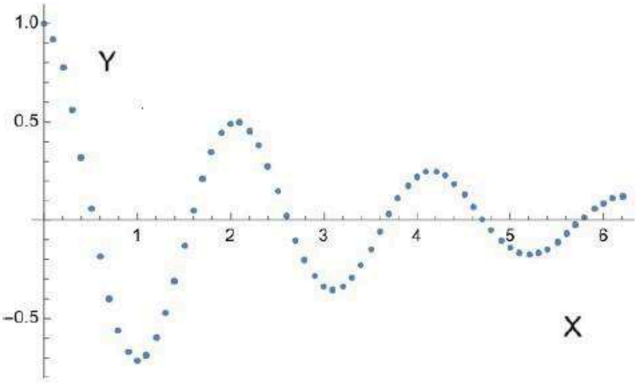
A4: 4

4

Objective Question

17 705117

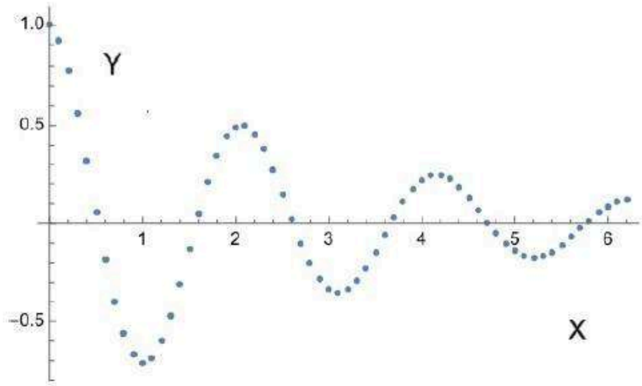
An experiment has collected data in some units which is presented in the below X-Y graph.



What would be the best function to fit the data? (for some positive constant k)

1. Y = cos [kX]
2. Y = sin [kX^2]
3. Y = tan [kX^3]
4. Y = $e^{-\frac{x}{k}}$ cos[kX]

एक प्रयोग में कुछ इकाइयों में आंकड़ों को संकलित करके नीचे दिए गए X-Y ग्राफ में प्रस्तुत किया गया है



आंकड़ों को इसमें फिट करने के लिए कौन सा फलन (फंक्शन) सर्वोत्तम होगा? (कुछ सकारात्मक स्थिरांक k के लिए)

1. Y = cos [kX]
2. Y = sin [kX^2]
3. Y = tan [kX^3]
4. Y = $e^{-\frac{x}{k}}$ cos[kX]

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

18 705118

Ten litre (L) milk contains 10% water. How much water should be added to increase its proportion to 20%?

1. 1 L
2. 1.25 L
3. 2 L
4. 2.25 L

दस लीटर दूध में 10% पानी है। पानी के अनुपात को 20% तक बढ़ाने के लिए इसमें कितना पानी मिलाना पड़ेगा?

1. 1 लीटर
2. 1.25 लीटर
3. 2 लीटर
4. 2.25 लीटर

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

19 705119

If Asha's mother is Tanisha's daughter's aunt and Tanisha has no nephew, then Asha is Tanisha's

1. mother
2. niece
3. grand mother
4. sister

यदि आशा की माँ तनीशा की पुत्री की चाची है और तनीशा का कोई भतीजा नहीं है तो आशा तनीशा की क्या है?

1. माँ
2. भतीजी
3. दादी
4. बहन

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

20 705120

A chocolate bar of 5 cm length and 4 cm width has to be cut into 1 cm × 1 cm pieces. How many minimum cuts would be required, if pieces are to be taken one-by-one? (One can start by cutting along either length or width, before removing 1 cm x 1 cm pieces one by one)

1. 20
2. 19
3. 18
4. 10

5 सेमी लंबाई तथा 4 सेमी चौड़ाई के एक चॉकलेट बार को 1 सेमी × 1 सेमी के टुकड़ों में काटना है। यदि एक के बाद एक टुकड़ा लिया जाना है तो इसके लिए कितने न्यूनतम कट जरूरी होंगे? (1 सेमी x 1 सेमी टुकड़ों को एक-एक करके अलग करने के लिए या तो लंबाई या चौड़ाई के समांतर काटने से शुरुआत की जा सकती है)

1. 20
2. 19
3. 18
4. 10

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

21 706501

Let A, B be two non-empty subsets of $\mathbb{R}$. Let

$$\begin{aligned} S &= \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}, \\ T &= \{f : B \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}, \\ U &= \{f : A \times A \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}. \end{aligned}$$

Which of the following statements is true?

1. If A is finite, then there exists a bijection between S and U.
2. If A is finite and $B = [0, 1]$, then there is no bijection between S and T.
3. There is no bijection between S and U for any choice of A.
4. If $A \neq B$, then there is no bijection between T and U.

मानें कि $\mathbb{R}$ के दो अरिक्त उपसमुच्चय A, B हैं। मानें कि

$$\begin{aligned} S &= \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ सतत है}\}, \\ T &= \{f : B \to \mathbb{R} \mid f \text{ सतत है}\}, \\ U &= \{f : A \times A \to \mathbb{R} \mid f \text{ सतत है}\}. \end{aligned}$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. यदि A परिमित है, तब S तथा U के मध्य एकैकी आच्छादन है।
2. यदि A परिमित है तथा $B = [0, 1]$ है, तब S तथा T के मध्य कोई एकैकी आच्छादन नहीं है।
3. किसी भी A के लिए, S तथा U के मध्य कोई एकैकी आच्छादन नहीं है।
4. यदि $A \neq B$ है, तब T तथा U के मध्य कोई एकैकी आच्छादन नहीं है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

22	706502

Let $(x_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of real numbers that has a decreasing subsequence $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Assume that

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = 2025.$$

Which of the following statements is necessarily true?

1. $\liminf_{n\to\infty} x_n \geq 2025$
2. $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq 2025$
3. $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq 2025$
4. $\liminf_{k\to\infty} x_{n_k} > 2025$

मानें कि $(x_n)_{n\geq 1}$ वास्तविक संख्याओं का कोई अनुक्रम है जिसका ह्रासमान उपानुक्रम $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ है। मानें कि

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = 2025.$$

निम्न में से कौन सा कथन आवश्यकत: सत्य है?

1. $\liminf_{n\to\infty} x_n \geq 2025$
2. $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq 2025$
3. $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq 2025$
4. $\liminf_{k\to\infty} x_{n_k} > 2025$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

23	706503

Consider the sequences $(a_n)_{n\geq 1}$ and $(b_n)_{n\geq 1}$, defined by

$$a_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{and} \quad b_n = -2\sqrt{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Which of the following statements is true?

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ converges but $(b_n)_{n\geq 1}$ does not converge.
2. $(b_n)_{n\geq 1}$ converges but $(a_n)_{n\geq 1}$ does not converge.
3. Both $(a_n)_{n\geq 1}$ and $(b_n)_{n\geq 1}$ converge.
4. Neither $(a_n)_{n\geq 1}$ nor $(b_n)_{n\geq 1}$ converges.

अनुक्रमों $(a_n)_{n\geq 1}$ तथा $(b_n)_{n\geq 1}$ पर विचार करें जो निम्न से परिभाषित हैं

$$a_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{तथा} \quad b_n = -2\sqrt{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ अभिसरित होता है लेकिन $(b_n)_{n\geq 1}$ अभिसरित नहीं होता है।
2. $(b_n)_{n\geq 1}$ अभिसरित होता है लेकिन $(a_n)_{n\geq 1}$ अभिसरित नहीं होता है।
3. $(a_n)_{n\geq 1}$ तथा $(b_n)_{n\geq 1}$ दोनों अभिसरित होते हैं।
4. $(a_n)_{n\geq 1}$ तथा $(b_n)_{n\geq 1}$ दोनों में कोई भी अभिसरित नहीं होता है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

24 706504

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a non-constant continuous function. Which of the following statements is necessarily true?

1. For every bounded subset $A \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ is a bounded subset of $\mathbb{R}$.
2. For every Cauchy sequence $(x_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$, $(f(x_n))_{n\geq 1}$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$.
3. There exists $x \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = x$.
4. There exists $x \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = 0$.

मानें कि $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ कोई अचरेतर सतत फलन है। निम्न में से कौन सा कथन आवश्यकत: सत्य है?

1. प्रत्येक परिबद्ध उपसमुच्चय $A \subseteq \mathbb{R}$ के लिए, $\mathbb{R}$ का उपसमुच्चय $f^{-1}(A)$ परिबद्ध है।
2. $\mathbb{R}$ में प्रत्येक कॉशी अनुक्रम $(x_n)_{n\geq 1}$ के लिए, $(f(x_n))_{n\geq 1}$ भी $\mathbb{R}$ में कॉशी अनुक्रम हैं।
3. ऐसा $x \in \mathbb{R}$ है जिसके लिए $f(x) = x$ है।
4. ऐसा $x \in \mathbb{R}$ है जिसके लिए $f(x) = 0$ है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

25 706505

Let $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ be a bijective function. Which of the following statements is true?

1. f is monotone.
2. f is continuous but not strictly monotone.
3. f is not continuous.
4. f is continuous but not uniformly continuous.

मानें कि $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ एकैकी आच्छादी फलन है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. f एकदिष्ट है।
2. f सतत है लेकिन दृढ़तः एकदिष्ट नहीं है।
3. f सतत नहीं है।
4. f सतत है लेकिन एकसमानतः सतत नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

26 706506

Consider the sequences $(f_n)_{n\geq 1}$ and $(g_n)_{n\geq 1}$ of functions defined on the interval $[-1, 1]$ by

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} \quad \text{and} \quad g_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n^2}{n^3}.$$

Which of the following statements is true?

1. $\sum_{n\geq 1} f_n$ and $\sum_{n\geq 1} g_n$ are uniformly convergent on the interval $[-1, 1]$.
2. $\sum_{n\geq 1} f_n$ is uniformly convergent on the interval $[-1, 1]$, but $\sum_{n\geq 1} g_n$ is not.
3. $\sum_{n\geq 1} g_n$ is uniformly convergent on the interval $[-1, 1]$, but $\sum_{n\geq 1} f_n$ is not.
4. Neither $\sum_{n\geq 1} f_n$ nor $\sum_{n\geq 1} g_n$ is uniformly convergent on the interval $[-1, 1]$.

अंतराल $[-1,1]$ पर निम्नवत् परिभाषित फलनों के अनुक्रम $(f_n)_{n\geq 1}$ तथा $(g_n)_{n\geq 1}$ पर विचार करें

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} \quad \text{तथा} \quad g_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n^2}{n^3}.$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $\sum_{n\geq 1} f_n$ तथा $\sum_{n\geq 1} g_n$ अंतराल $[-1,1]$ पर एकसमानत: अभिसारी हैं।
2. $\sum_{n\geq 1} f_n$ अंतराल $[-1,1]$ पर एकसमानत: अभिसारी है, लेकिन $\sum_{n\geq 1} g_n$ नहीं है।
3. $\sum_{n\geq 1} g_n$ अंतराल $[-1,1]$ पर एकसमानत: अभिसारी है, लेकिन $\sum_{n\geq 1} f_n$ नहीं है।
4. न तो $\sum_{n\geq 1} f_n$ और न ही $\sum_{n\geq 1} g_n$ अंतराल $[-1,1]$ पर एकसमानत: अभिसारी हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

27 706507

Let V be a vector space over $\mathbb{R}$. Let $T_1, T_2 : V \to V$ be two $\mathbb{R}$-linear transformations such that T_1+T_2 and T_1-T_2 are linearly independent over $\mathbb{R}$. Consider the following statements:

(A) The transformations T_1 and T_2 are linearly independent over $\mathbb{R}$.

(B) There exist $\mathbb{R}$-linear transformations $T_3,\ T_4 : V \to V$ such that

$$\{T_1+T_2,\ T_1-T_2,\ T_3,\ T_4\}$$

is linearly independent over $\mathbb{R}$.

Which of the following statements is true?

1. (A) is true but (B) is false.
2. (B) is true but (A) is false.
3. Both (A) and (B) are true.
4. Both (A) and (B) are false.

मानें कि $\mathbb{R}$ पर V एक सदिश समष्टि है। मानें कि $T_1, T_2 : V \to V$ दो ऐसे $\mathbb{R}$-रैखिक रूपांतरण हैं कि $\mathbb{R}$ पर $T_1 + T_2$ तथा $T_1 - T_2$ रैखिकत: स्वतंत्र हैं। निम्न वक्तव्यों पर विचार करें:

(A) $\mathbb{R}$ पर रूपांतरण T_1 तथा T_2 रैखिकत: स्वतंत्र हैं।

(B) $\mathbb{R}$-रैखिक रूपांतरणों $T_3, T_4 : V \to V$ का अस्तित्व है जिनके लिए

$$\{T_1 + T_2,\ T_1 - T_2,\ T_3,\ T_4\}$$

$\mathbb{R}$ पर रैखिकत: स्वतंत्र है।

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. (A) सत्य है लेकिन (B) असत्य है।
2. (B) सत्य है लेकिन (A) असत्य है।
3. (A) तथा (B) दोनों सत्य हैं।
4. (A) तथा (B) दोनों असत्य हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

28 706508

Let $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ be an $\mathbb{R}$-linear transformation such that

$$(T^2 + T + I)(T - 2I) = 0 \quad \text{and} \quad (T^2 + T + 2I)(T^2 - 4I) = 0.$$

Which of the following statements is **FALSE**?

1. T is diagonalizable over $\mathbb{R}$.
2. The characteristic polynomial of T is $(x-2)^4$.
3. The characteristic polynomial of T is $(x^2 + x + 2)(x^2 - 4)$.
4. For every $\mathbb{R}$-linear transformation $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, we have $ST = TS$.

मानें कि $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ऐसा $\mathbb{R}$-रैखिक रूपांतरण है कि

$$(T^2 + T + I)(T - 2I) = 0 \quad \text{तथा} \quad (T^2 + T + 2I)(T^2 - 4I) = 0.$$

निम्न कथनों में से कौन सा **असत्य** है?

1. $\mathbb{R}$ पर T विकर्णनीय है।
2. T का अभिलक्षणिक बहुपद $(x-2)^4$ है।
3. T का अभिलक्षणिक बहुपद $(x^2 + x + 2)(x^2 - 4)$ है।
4. प्रत्येक $\mathbb{R}$-रैखिक रूपांतरण $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ के लिए, $ST = TS$ होगा।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

29 706509

Let A be a 3×3 complex matrix such that A^3 is the identity matrix. Which of the following statements is true?

1. A is diagonalizable.
2. A has at least two distinct eigenvalues.
3. The characteristic polynomial of A is $x^3 - 1$.
4. The minimal polynomial of A cannot have degree 2.

मानें कि A एक 3×3 सम्मिश्र आव्यूह है जिसके लिए A^3 तत्समक आव्यूह है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. A विकर्णनीय है।
2. A के कम से कम दो भिन्न अभिलक्षणिक मान हैं।
3. A का अभिलक्षणिक बहुपद $x^3 - 1$ है।
4. A के अल्पिष्ठ बहुपद की कोटि 2 नहीं हो सकती।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

30 706510

For any matrix P, the transpose of P is denoted by P^t. Consider the real matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Which of the following statements is true?

1. There exists a real invertible matrix P such that PAP^{-1} is a diagonal matrix and $P^tP = I_3$.
2. There exists a real invertible matrix P such that PAP^{-1} is a diagonal matrix and $P^tP \neq I_3$.
3. One of the eigenvalues of A is not real.
4. A has only real eigenvalues and it is not diagonalizable over $\mathbb{R}$.

किसी आव्यूह P के परिवर्त को P^t से निर्दिष्ट करें। निम्न वास्तविक आव्यूह पर विचार करें

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. ऐसा वास्तविक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P है कि PAP^{-1} विकर्ण-आव्यूह है तथा $P^tP = I_3$ है।
2. ऐसा वास्तविक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P है कि PAP^{-1} विकर्ण-आव्यूह है तथा $P^tP \neq I_3$ है।
3. A का एक अभिलक्षणिक मान वास्तविक नहीं है।
4. A के केवल वास्तविक अभिलक्षणिक मान हैं तथा यह $\mathbb{R}$ पर विकर्णनीय नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

31 706511

Consider $\mathbb{R}^4$ with the standard inner product. Let V be the subspace of $\mathbb{R}^4$ spanned by the vectors $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,1)$, and $(0,0,1,0)$. Which of the following is **NOT** an orthonormal basis of V?

1. $\left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right),(0,0,1,0)\right\}$
2. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right),(0,0,1,0)\right\}$
3. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},0,\frac{-1}{\sqrt{6}}\right),(0,0,1,0)\right\}$
4. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}},0,\frac{-1}{\sqrt{6}}\right),(0,0,1,0)\right\}$

मानक आंतर गुणनफलन वाले $\mathbb{R}^4$ पर विचार करें। मानें कि V सदिशों $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,1)$, व $(0,0,1,0)$ द्वारा विस्तृत $\mathbb{R}^4$ की उपसमष्टि है। निम्न में से कौन सा V का प्रसामान्य लांबिक आधार **नहीं** है?

1. $\left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right),(0,0,1,0)\right\}$
2. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right),(0,0,1,0)\right\}$
3. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},0,\frac{-1}{\sqrt{6}}\right),(0,0,1,0)\right\}$
4. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}},0,\frac{-1}{\sqrt{6}}\right),(0,0,1,0)\right\}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

32	706512

Consider the real matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Define $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ by $B(v, w) = v^t A w$. Which of the following statements is true?

1. $B(v, v) = 0$ if and only if $v = 0$.
2. For every $\lambda \in \mathbb{R}$, there exists v such that $B(v, v) = \lambda$.
3. There exists $v \neq 0$ such that $B(v, w) = 0$ for all $w \in \mathbb{R}^3$.
4. If $B(v, w) = 0$ then either $v = 0$ or $w = 0$.

निम्न वास्तविक आव्यूह पर विचार करें

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ को $B(v, w) = v^t A w$ से परिभाषित करें। निम्न कथनों में से कौनसा सत्य है?

1. $B(v, v) = 0$ है यदि और केवल यदि $v = 0$ है।
2. प्रत्येक $\lambda \in \mathbb{R}$ के लिए ऐसा v होगा कि $B(v, v) = \lambda$ है।
3. ऐसा $v \neq 0$ होगा कि सभी $w \in \mathbb{R}^3$ के लिए $B(v, w) = 0$ है।
4. यदि $B(v, w) = 0$ है तब, या $v = 0$ है या $w = 0$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

33	706513	

For $z = x + iy \in \mathbb{C}$, let $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ define an entire function. Consider the function

$$g(z) = u(x, -y) - iv(x, -y), \text{ for } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Suppose that $v(x, 0) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Define $E = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = g(z)\}$. Which of the following statements is true?

1. E is the real axis.
2. E is the imaginary axis.
3. E contains an open subset of $\mathbb{C}$, but $E \neq \mathbb{C}$.
4. $E = \mathbb{C}$

मानें कि $z = x + iy \in \mathbb{C}$ के लिए $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ द्वारा परिभाषित फलन सर्वत्र वैश्लेषिक है। निम्न फलन पर विचार करें

$$g(z) = u(x, -y) - iv(x, -y), \text{ जहाँ } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

मानें कि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिये $v(x, 0) = 0$ है। परिभाषित करें $E = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = g(z)\}$। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. E वास्तविक अक्ष है।
2. E काल्पनिक अक्ष है।
3. E में $\mathbb{C}$ का एक विवृत उपसमुच्चय समाहित है लेकिन $E \neq \mathbb{C}$ है।
4. $E = \mathbb{C}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

34 706514

Consider the half planes

$$R_+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,:\, x > 0\} \quad \text{and} \quad R_- = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,:\, x < 0\},$$

and the fractional linear transformations

$$T_1(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{and} \quad T_2(z) = \frac{z+1}{z-1}.$$

Let disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$. Which of the following statements is true?

1. T_1 and T_2 conformally map R_+ and R_- respectively, onto the disc $\mathbb{D}$
2. T_1 and T_2 conformally map R_- and R_+ respectively, onto the disc $\mathbb{D}$
3. T_1 and T_2 conformally map the disc $\mathbb{D}$ onto, respectively R_+ and R_-
4. T_1 and T_2 conformally map the disc $\mathbb{D}$ onto, respectively R_- and R_+

निम्न अर्ध-समतलों

$$R_+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,:\, x > 0\} \quad \text{तथा} \quad R_- = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,:\, x < 0\},$$

को लें तथा निम्न भिन्नात्मक रैखिक रूपांतरणों पर विचार करें

$$T_1(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{तथा} \quad T_2(z) = \frac{z+1}{z-1}.$$

मानें कि चक्रिका $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$ है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. T_1 तथा T_2 क्रमशः R_+ तथा R_- का चक्रिका $\mathbb{D}$ पर अनुकोणतः आच्छादी प्रतिचित्रण करते हैं।
2. T_1 तथा T_2 क्रमशः R_- तथा R_+ का चक्रिका $\mathbb{D}$ पर अनुकोणतः आच्छादी प्रतिचित्रण करते हैं।
3. T_1 तथा T_2 चक्रिका $\mathbb{D}$ को क्रमशः R_+ तथा R_- पर अनुकोणतः आच्छादी प्रतिचित्रित करते हैं।
4. T_1 तथा T_2 चक्रिका $\mathbb{D}$ को क्रमशः R_- तथा R_+ पर अनुकोणतः आच्छादी प्रतिचित्रित करते हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

35	706515	

Let γ be the circle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ oriented counterclockwise. Let f be an entire function. What is the value of A for which

$$\int_\gamma \left(\frac{A}{z-1} - \frac{f(z)}{(z-2)^2}\right) dz = 0$$

holds?

1. $f(1)$
2. $f(2)$
3. $f'(1)$
4. $f'(2)$

मानें कि γ वामावर्ती अभिविन्यासित वृत्त $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ है। मान लें कि f एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है। यदि

$$\int_\gamma \left(\frac{A}{z-1} - \frac{f(z)}{(z-2)^2}\right) dz = 0$$

हो तो A मान क्या होगा?

1. $f(1)$
2. $f(2)$
3. $f'(1)$
4. $f'(2)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

36 706516

Consider the entire function

$$f(z) = z^2(e^z - e^{-z})$$

and the meromorphic function

$$g(z) = \frac{z^2}{e^z - e^{-z}}$$

on $\mathbb{C}$. Which of the following statements is true?

1. $z = 0$ is a zero of f of order 3 and a pole of g of order 1.
2. $z = 0$ is a zero of f of order 2 and a pole of g of order 1.
3. $z = 0$ is a zero of f of order 3 and a zero of g of order 1.
4. $z = 0$ is a zero of f of order 2 and a zero of g of order 1.

मानें कि $\mathbb{C}$ पर सर्वत्र वैश्लेषिक फलन

$$f(z) = z^2(e^z - e^{-z})$$

तथा अनंतकी फलन

$$g(z) = \frac{z^2}{e^z - e^{-z}}$$

है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $z = 0$, फलन f का कोटि 3 का शून्य तथा फलन g का कोटि 1 का ध्रुव है।
2. $z = 0$, फलन f का कोटि 2 का शून्य तथा फलन g का कोटि 1 का ध्रुव है।
3. $z = 0$, फलन f का कोटि 3 का शून्य तथा फलन g का कोटि 1 का शून्य है।
4. $z = 0$, फलन f का कोटि 2 का शून्य तथा फलन g का कोटि 1 का शून्य है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

37 706517

Let p be a prime number. An element a of the multiplicative group $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ is said to be a primitive root in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ if the order of a in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ is $p-1$. Let S_p be the number of primitive roots in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ and φ denote the Euler φ-function. Which of the following statements is true?

1. For each $p < 100$,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_p}{\varphi(p)}\right)^n$$
converges.
2. For each $100 \le p \le 200$,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_p}{\varphi(p)}\right)^n$$
diverges.
3. For each $p > 200$,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_p}{\varphi(p)}\right)^n$$
converges.
4. The element $4 \bmod 101$ in $(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times$ is a primitive root.

मानें कि p एक अभाज्य संख्या है। यदि गुणनात्मक समूह $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ के किसी अवयव a की $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ में कोटि $p-1$ है तो को $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ में पूर्वग मूल कहा जाता है। मान लो कि $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ के पूर्वग मूलों की संख्या को S_p तथा ऑयलर-φ फलन को द्वारा निर्दिष्ट करते हैं। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. प्रत्येक $p < 100$ के लिए
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_p}{\varphi(p)}\right)^n$$
अभिसारी है।
2. प्रत्येक $100 \le p \le 200$ के लिए
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_p}{\varphi(p)}\right)^n$$
अपसारी है।
3. प्रत्येक $p > 200$ के लिए
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_p}{\varphi(p)}\right)^n$$
अभिसारी है।
4. $(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times$ में अवयव $4 \bmod 101$ एक पूर्वग मूल है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

38 706518

Let G be a group of order $n > 3$ and H be a subgroup with $1 < |H| < n$. Consider the set

$$X = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Which of the following statements is true?

1. If G is abelian, then $|X| = n$.
2. If $|X|$ divides n, then G is abelian.
3. $|X| < n$
4. $|X|$ divides n.

मानें कि G कोटि $n > 3$ का समूह है तथा H एक ऐसा उपसमूह है जिसके लिए $1 < |H| < n$ है। निम्न समुच्चय पर विचार करें

$$X = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. यदि G आबेली है, तब $|X| = n$ है।
2. यदि n को $|X|$ विभाजित करता है, तब G आबेली है।
3. $|X| < n$
4. $|X|$ द्वारा n विभाजित होता है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

39 706519

Consider the ring homomorphism $\psi : \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[t]$ defined by

$$\psi(f(x, y)) = f(t^2, t^3).$$

Which of the following statements is true?

1. ψ is surjective.
2. If $p_1(x)y + p_2(x) \in \ker \psi$ for polynomials $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{C}[x]$, then both p_1 and p_2 are the zero polynomial.
3. There exist non-zero polynomials $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ such that $\psi(p_1(x)y + p_2(x)) = 0$.
4. There exists $f \in \mathbb{C}[x, y]$ such that $\psi(f(x, y)) = 0$ and $\psi(f^2(x, y)) \neq 0$.

वलय समाकारिता $\psi : \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[t]$ निम्नवत् परिभाषित है

$$\psi(f(x, y)) = f(t^2, t^3).$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. ψ आच्छादी है।
2. यदि बहुपदों $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ के लिए $p_1(x)y + p_2(x) \in \ker \psi$, तब p_1 तथा p_2 दोनों शून्य बहुपद हैं।
3. ऐसे शून्येतर बहुपद $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ हैं जिनके लिए $\psi(p_1(x)y + p_2(x)) = 0$ है।
4. ऐसा $f \in \mathbb{C}[x, y]$ है जिसके लिए $\psi(f(x, y)) = 0$ तथा $\psi(f^2(x, y)) \neq 0$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

40 706520

Let $\mathbb{N}$ be the set of positive integers. Consider $\mathbb{R}^2$ with the Euclidean topology and the subsets

$$A = \left\{ \left(n, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \left(n, \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Which of the following statements is true?

1. A is a closed subset of $\mathbb{R}^2$ but B is not a closed subset of $\mathbb{R}^2$.
2. B is a closed subset of $\mathbb{R}^2$ but A is not a closed subset of $\mathbb{R}^2$.
3. Both A and B are closed subsets of $\mathbb{R}^2$.
4. Neither A nor B is a closed subset of $\mathbb{R}^2$.

मान लें कि $\mathbb{N}$ धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय है। यूक्लिडीय सांस्थितिकी वाले $\mathbb{R}^2$ तथा निम्न उपसमच्चयों पर विचार करें

$$A = \left\{ \left(n, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \left(n, \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $\mathbb{R}^2$ का संवृत उपसमुच्चय A है, लेकिन $\mathbb{R}^2$ का संवृत उपसमुच्चय B नहीं है।
2. $\mathbb{R}^2$ का संवृत उपसमुच्चय B है, लेकिन $\mathbb{R}^2$ का संवृत उपसमुच्चय A नहीं है।
3. A तथा B दोनों $\mathbb{R}^2$ के संवृत उपसमुच्चय हैं।
4. A तथा B में से कोई भी $\mathbb{R}^2$ का संवृत उपसमुच्चय नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

41 706521

For any non-zero solution $y = y(x)$ of the differential equation

$$(2x+3)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6(2x+3)\frac{dy}{dx} + 8y = 0, \; x > 0,$$

denote $S := \{x \in (0, \infty) : y(x) = 0\}$. Then

1. S is an empty set.
2. S is a non-empty finite set.
3. S is a countably infinite set.
4. S is an uncountable set.

निम्न अवकल समीकरण

$$(2x+3)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6(2x+3)\frac{dy}{dx} + 8y = 0,\ x > 0,$$

के किसी भी शून्येतर हल $y = y(x)$ के लिए $S := \{x \in (0, \infty) \ : \ y(x) = 0\}$ लें। तब

1. S एक रिक्त समुच्चय है।
2. S एक अरिक्त परिमित समुच्चय है।
3. S एक गणनीयतः अनंत समुच्चय है।
4. S एक अगणनीय समुच्चय है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

42 706522

The initial value problem

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|x-1|}\,\sin y,\ \ y(0) = 1$$

has

1. a unique solution on $\mathbb{R}$
2. infinitely many solutions on the interval $(-2, 2)$
3. a unique solution and its maximal interval of existence is $(-\infty, 1)$
4. no solution on the interval $(-2, 2)$

निम्न आरंभिक मान समस्या

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|x-1|}\,\sin y,\ \ y(0) = 1$$

का/के

1. $\mathbb{R}$ पर एक अद्वितीय हल है।
2. अंतराल $(-2, 2)$ में अनंत हल हैं।
3. एक अद्वितीय हल है तथा इस के अस्तित्व का उच्चिष्ठ अंतराल $(-\infty, 1)$ है।
4. अंतराल $(-2, 2)$ में कोई हल नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

43 706523

The problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ in } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\},$$
$$u(x,y) = 1 \text{ on } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

has

1. no solution
2. exactly one solution
3. exactly two solutions
4. infinitely many solutions

समस्या

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 > 1\} \text{ में },$$
$$u(x,y) = 1 \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \text{ पर}$$

का/के

1. कोई हल नहीं है।
2. यथातथ एक हल है।
3. यथातथ दो हल हैं।
4. अनंत हल हैं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

44 706524

The problem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2,$$
$$u(x,0) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

has a solution on an open set containing the line $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ax + by = 0\}$ if

1. $a = 1$ and $b = 0$
2. $a = 1$ and $b = -1$
3. $a = 2$ and $b = 1$
4. $a = 1$ and $b = 2$

समस्या

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2,$$
$$u(x,0) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

का $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ रेखा को समाहित करने वाले किसी विवृत समुच्चय पर हल है यदि

1. $a = 1$ तथा $b = 0$
2. $a = 1$ तथा $b = -1$
3. $a = 2$ तथा $b = 1$
4. $a = 1$ तथा $b = 2$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

45 706525

Consider the quadrature formula

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx \approx \frac{1}{2}\big(f(-1) + f(1)\big).$$

Then the degree of precision (also known as order of exactness) of the quadrature formula is

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

निम्न क्षेत्रकलन सूत्र पर विचार करें

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx \approx \frac{1}{2}\big(f(-1) + f(1)\big).$$

तब क्षेत्रकलन सूत्र की परिशुद्धता कोटि (जिसे यथातथ कोटि भी कहा जाता है) है

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

46 706526

If $\varphi \in C^4[0,1]$ is the extremal of the variational problem

$$\text{minimize } J[y] = \int_0^1 \left(yy' + (y'')^2\right) dx,$$
$$\text{subject to } y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 4,$$

then $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ is equal to

1. $\dfrac{5}{8}$
2. $\dfrac{3}{4}$
3. $\dfrac{3}{8}$
4. $\dfrac{5}{4}$

यदि $\varphi \in C^4[0,1]$ निम्न विचरण समस्या का चरमक है

$$\text{minimize } J[y] = \int_0^1 \left(yy' + (y'')^2\right) dx,$$
$$\text{बशर्ते } y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=2,\ y'(1)=4,$$

तब $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ निम्न है

1. $\frac{5}{8}$
2. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{3}{8}$
4. $\frac{5}{4}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

47 706527

If u is a solution of the integral equation

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)u(t)dt,$$

where

$$K(x,t) := \begin{cases} x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ t(1-x), & 0 \leq t \leq x \leq 1, \end{cases}$$

then

1. $\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0 = u(1)$
2. $\frac{d^2u}{dx^2} - \lambda u = 0, \quad u(0) = 0 = u(1)$
3. $\frac{du}{dx} + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0 = u(1)$
4. $\frac{du}{dx} - \lambda u = 0, \quad u(0) = 0 = u(1)$

यदि u निम्न समाकलन समीकरण का हल है

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)u(t)dt,$$

जहां

$$K(x,t) := \begin{cases} x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ t(1-x), & 0 \leq t \leq x \leq 1, \end{cases}$$

तब

1. $\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0 = u(1)$
2. $\frac{d^2u}{dx^2} - \lambda u = 0, \quad u(0) = 0 = u(1)$
3. $\frac{du}{dx} + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0 = u(1)$
4. $\frac{du}{dx} - \lambda u = 0, \quad u(0) = 0 = u(1)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

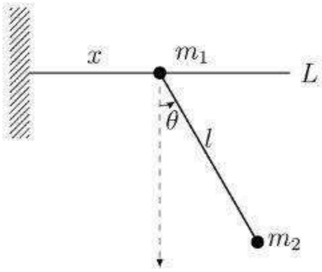
A4 : 4

4

Objective Question

48 706528

Consider a particle of mass m_1 moving along a horizontal line L that is perpendicular to a vertical wall. Let x denote the distance of the particle from the wall. Suppose a simple pendulum of length l having mass m_2, $m_2 \neq m_1$, is attached to the particle as shown in the figure.



If the pendulum oscillates in a plane containing L, then the equations of motion in terms of the generalized coordinates x and θ are (g denotes the acceleration due to gravity)

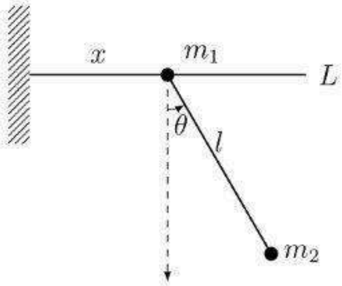
1. $\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + lm_2\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0, \\ l\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\theta\right) + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + lm_2\ddot{\theta}\cos\theta = 0, \\ l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + lm_1\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0, \\ l\ddot{\theta} + m_2\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\theta\right) + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + l\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right) + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0, \\ l\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\theta\right) + \dot{\theta}\cos\theta = 0 \end{cases}$

किसी ऊर्ध्वाधर दीवार के लंबवत क्षैतिज रेखा L पर गतिमान द्रव्यमान m_1 के कण पर विचार कीजिए। मानें कि कण की दीवार से दूरी x है। लम्बाई l का एक सरल दोलक जिसका द्रव्यमान m_2, $m_2 \neq m_1$ है, चित्रानुसार कण से जुड़ा हुआ है।



यदि दोलक, L को समाहित करने वाले समतल में दोलन करता है, तब व्यापकीकृत निर्देशांकों x तथा θ द्वारा व्यक्त गति के समीकरण (यहाँ g गुरुत्वीय त्वरण है) निम्न हैं

1. $\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + lm_2\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0, \\ l\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\theta\right) + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + lm_2\ddot{\theta}\cos\theta = 0, \\ l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + lm_1\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0, \\ l\ddot{\theta} + m_2\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\theta\right) + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + l\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right) + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0, \\ l\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\theta\right) + \dot{\theta}\cos\theta = 0 \end{cases}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

49	706529	

Suppose that $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables with the common probability density function

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

Then which of the following statements is true?

1. X_1 and $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ have the same distribution.
2. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converges to 0 in probability, as $n \to \infty$.
3. Median of $\{X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}\}$ converges to 0 in probability, as $n \to \infty$.
4. $E\left(|X_1|^{\frac{3}{4}}\right) = \infty$

मानें कि $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ निम्न प्रायिकता घनत्व फलन वाले स्वतंत्र एवं सर्वथासमानतः बंटित (i.i.d.) यादृच्छिक चरों का अनुक्रम है

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

तब निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. X_1 तथा $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ के बंटन समान हैं।
2. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ प्रायिकता में 0 पर अभिसरित होता है, जब $n \to \infty$
3. $\{X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}\}$ की माध्यिका प्रायिकता में 0 पर अभिसरित होती है, जब $n \to \infty$
4. $E\left(|X_1|^{\frac{3}{4}}\right) = \infty$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

50 706530

Let $U_1, U_2, \ldots, U_6$ be 6 urns such that urn U_k contains $3k + k^2$ balls, out of which $3k$ are white balls and k^2 are black balls, $k = 1, 2, \ldots, 6$. An urn is selected with the probability of selecting urn U_k being proportional to $(k + 3)$. A ball is chosen randomly from the selected urn. Then the probability that urn U_6 was selected, given that the ball drawn is white, is equal to

1. $\frac{7}{13}$
2. $\frac{6}{13}$
3. $\frac{1}{6}$
4. $\frac{7}{9}$

मानें कि $U_1, U_2, \ldots, U_6$ ऐसे 6 कलश हैं, कि $k = 1, 2, \ldots, 6$ के लिए, कलश U_k में $3k + k^2$ गेंदें हैं जिनमें से $3k$ सफ़ेद गेंदें है तथा k^2 काली गेंदें है। किसी एक कलश को इस प्रकार चुना जाता है कि कलश U_k के चुने जाने की प्रायिकता $(k+3)$ के समानुपाती हो। चयनित कलश में से एक गेंद को यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। यदि ज्ञात है कि निकाली गई गेंद सफ़ेद है तो चयनित कलश के U_6 होने की प्रायिकता निम्न के बराबर है

1. $\frac{7}{13}$
2. $\frac{6}{13}$
3. $\frac{1}{6}$
4. $\frac{7}{9}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

51 706531

Planes take off in a busy airport in accordance with the Poisson process with rate 60 planes per hour. 10% of these planes are cargo planes and 90% are passenger planes. Given that 10 cargo planes have taken off during one hour, what is the expected total number of planes that have taken off in that hour?

1. 90
2. 54
3. 64
4. 50

किसी व्यस्त हवाई अड्डे पर वायुयान प्वासों प्रक्रिया के अनुसार उड़ान भरते हैं जिसकी दर 60 वायुयान प्रति घंटा है। इन वायुयानों मे से 10% माल ढोने वाले तथा 90% यात्रियों को ढोने वाले वायुयान हैं। यदि ज्ञात है कि एक घंटे में माल ढोने वाले 10 वायुयानों ने उड़ान भरी है, तो उस घंटे में उड़ान भरने वाले वायुयानों की प्रत्याशित कुल संख्या है:

1. 90
2. 54
3. 64
4. 50

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

52 706532

Suppose $X \sim \text{Uniform}(5, 10)$. Define

$$Z = \begin{cases} X+3, & \text{if } X \leq 7 \\ X-3, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $E(Z)$ is

1. 4.5
2. 6.9
3. 7.5
4. 34.5

मानें कि $X \sim \text{Uniform}(5, 10)$. परिभाषित करें कि

$$Z = \begin{cases} X + 3, & \text{यदि } X \leq 7 \\ X - 3, & \text{अन्यथा.} \end{cases}$$

तब $E(Z)$ है

1. 4.5
2. 6.9
3. 7.5
4. 34.5

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

53 706533

Let X and Y be independent random variables such that X follows $U(0, 1)$ distribution and Y follows Bernoulli distribution with success probability $p \in (0, 1)$. Define $Z = X+Y$. Let $z_1 = 0.5$, $z_2 = 1.2$, $z_3 = 1.3$, $z_4 = 0.9$, $z_5 = 0.1$, $z_6 = 0.7$ be the observed values from the distribution of Z. Then the maximum likelihood estimate of p equals

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{1}{6}$

X तथा Y को ऐसे स्वतंत्र यादृच्छिक चर मानें कि X का बंटन $U(0, 1)$ है तथा Y का बंटन बर्नूली बंटन है जिसके लिए सफलता की प्रायिकता $p \in (0, 1)$ है। $Z = X + Y$ परिभाषित करें। मानें कि $z_1 = 0.5$, $z_2 = 1.2$, $z_3 = 1.3$, $z_4 = 0.9$, $z_5 = 0.1$, $z_6 = 0.7$, Z के बंटन में से प्रेक्षित मान हैं। तब p का अधिकतम संभाविता आकलन निम्न के बराबर है

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{1}{6}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

54 706534

Let X be a random variable with the probability density function

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x) & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\theta \in [0, 1]$. Based on single observation x, the critical region of the most powerful test for testing null hypothesis $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ against alternative hypothesis $H_1 : \theta = 1$, at level of significance $\alpha = 0.25$, is

1. $x < \frac{1}{4}$
2. $x > \frac{3}{4}$
3. $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$
4. $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$

मानें कि X एक यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x) & \text{यदि } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

जहां $\theta \in [0, 1]$ है। एक मात्र प्रेक्षण x के आधार पर, $\alpha = 0.25$ सार्थकता के स्तर पर वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \theta = 1$ के विरुद्ध निराकरणीय परिकल्पना $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ को परीक्षित करने के शक्ततम परीक्षण का क्रांतिक क्षेत्र है

1. $x < \frac{1}{4}$
2. $x > \frac{3}{4}$
3. $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$
4. $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

55 706535

Suppose that the probability density function of the random variable X is

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, & \text{if } 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\theta > 0$ is an unknown parameter. Based on a single observation X, the confidence coefficient of the confidence interval $\left[\frac{2}{5}X, \frac{5}{2}X\right]$ for θ is

1. 0.36
2. 0.55
3. 0.76
4. 0.95

मानें कि यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, & \text{यदि } 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{अन्यथा}, \end{cases}$$

जहां $\theta > 0$ कोई अज्ञात प्राचल है। एकमात्र प्रेक्षण X के आधार पर, θ के विश्वास्यता अंतराल $\left[\frac{2}{5}X, \frac{5}{2}X\right]$ के लिए विश्वास्यता गुणांक है

1. 0.36
2. 0.55
3. 0.76
4. 0.95

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

56 706536

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from distribution Poisson(θ), $\theta > 0$. Let

$$\pi(\theta) = e^{-\theta},\ \theta > 0,$$

be the prior distribution of θ. Under the squared error loss function, which of the following is the Bayes estimator of $e^{-2\theta}$?

1. $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i + 1}$
2. $\left(\frac{n+1}{n+3}\right) e^{-\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$
3. $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$
4. $\left(\frac{n+1}{n+3}\right) e^{-\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right)}$

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ बंटन Poisson(θ), $\theta > 0$ वाला एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। मानें कि

$$\pi(\theta) = e^{-\theta},\ \theta > 0,$$

θ का पूर्व (prior) बंटन है। वर्गित त्रुटि हानि फलन के अंतर्गत, निम्न में से कौन सा $e^{-2\theta}$ का बेज़ आकलक है?

1. $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i+1}$
2. $\left(\frac{n+1}{n+3}\right) e^{-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$
3. $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$
4. $\left(\frac{n+1}{n+3}\right) e^{-\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i+1\right)}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

57 706537

Consider a multiple linear regression model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i,\ 1 \le i \le n,\quad n > (p+1),$$

where errors ϵ_i's are uncorrelated with zero mean and finite variance $\sigma^2 > 0$. Here, Y_i is the i-th response. Let $\hat{Y_i}$ be the i-th predicted response by the least squares estimation method, and let $\hat{\epsilon_i} = Y_i - \hat{Y_i},\ 1 \le i \le n$. Then, which of the following statements is true?

1. $\text{Var}(\hat{Y_i}) \le \text{Var}(Y_i),\ 1 \le i \le n$
2. $\text{Cov}(\hat{Y_i}, \hat{Y_k}) = \text{Cov}(Y_i, Y_k), 1 \le\ i < k \le n$
3. $\text{Var}(\hat{\epsilon_i}) = \text{Var}(\epsilon_i),\ 1 \le i \le n$
4. $E(\hat{\epsilon_i}) < E(\epsilon_i),\ 1 \le i \le n$

एक बहुरैखिक समाश्रयण मॉडल पर विचार करें

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i,\ 1 \le i \le n,\quad n > (p+1),$$

जहां त्रुटियां ϵ_i असहसंबंधित हैं व उनका माध्य शून्य तथा प्रसरण $\sigma^2 > 0$ परिमित है। यहाँ i-वीं अनुक्रिया Y_i है। मानें कि $\hat{Y}_i$ न्यूनतम वर्ग आकलन विधि से i-वीं प्रागुक्त अनुक्रिया है तथा मानें कि $\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i,\ 1 \le i \le n$ है। तब, निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $\text{Var}(\hat{Y}_i) \le \text{Var}(Y_i),\ 1 \le i \le n$
2. $\text{Cov}(\hat{Y}_i, \hat{Y}_k) = \text{Cov}(Y_i, Y_k), 1 \le\ i < k \le n$
3. $\text{Var}(\hat{\epsilon}_i) = \text{Var}(\epsilon_i),\ 1 \le i \le n$
4. $E(\hat{\epsilon}_i) < E(\epsilon_i),\ 1 \le i \le n$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

58 706538

Let X, Y and Z be independent and identically distributed (i.i.d.) random variables with distribution $N(0,1)$. Define $U = 2X, V = 3X+Y, W = X+4Z$. Then the partial correlation coefficient of V and W, given U is

1. 0
2. 0.5
3. -1
4. 1

X, Y तथा Z स्वतंत्र एवं सर्वथासमानतः बंटित (i.i.d.) यादृच्छिक चर हैं, जिनका बंटन $N(0,1)$ है। $U = 2X, V = 3X+Y$, $W = X + 4Z$ परिभाषित करें। तब U के सापेक्ष, V तथा W का आंशिक सहसंबंध गुणांक है

1. 0
2. 0.5
3. -1
4. 1

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4: 4

4

Objective Question

59 706539

Consider the following design where the columns represent blocks and the letters represent treatments:

A	C	A	B	A	B	A	B	C	D
B	D	C	D	D	C	E	E	E	E

Then, which of the following statements is **NOT** true?

1. The design is a balanced incomplete block design.
2. The design is connected.
3. The design is binary.
4. The design is symmetric.

निम्न डिज़ाईन पर विचार करें जिसमें स्तंभ, ब्लॉक को दिखाते हैं; तथा अक्षर, उपचार को दिखाते हैं:

A	C	A	B	A	B	A	B	C	D
B	D	C	D	D	C	E	E	E	E

तब निम्न वक्तव्यों में से कौन सा सत्य **नहीं** है?

1. यह डिज़ाईन एक संतुलित अपूर्ण ब्लॉक डिज़ाईन है।
2. यह डिज़ाईन संबद्ध है।
3. यह डिज़ाईन द्विआधारी है।
4. यह डिज़ाईन सममित है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Objective Question

60 706540

Consider an $M/M/3$ queuing system with arrival rate $\lambda = 2$ and service rate $\mu = \frac{3}{2}$. Define, for $i = 1, 2, \ldots$,

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{if the first transition is from } i \text{ to } i+1 \\ 0 & \text{if the first transition is from } i \text{ is } i-1. \end{cases}$$

Then, $\mathrm{Var}(I_4)$ equals

1. $\frac{33}{169}$
2. $\frac{34}{169}$
3. $\frac{35}{169}$
4. $\frac{36}{169}$

एक $M/M/3$ पंक्ति प्रणाली पर विचार करें जिसके लिए आगमन दर $\lambda = 2$ तथा सेवा दर $\mu = \frac{3}{2}$ है। $i = 1, 2, \ldots$ के लिए निम्नवत परिभाषित करें

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{यदि प्रथम संक्रमण } i \text{ से } i+1 \text{ को है} \\ 0 & \text{यदि प्रथम संक्रमण } i \text{ से } i-1 \text{ को है।} \end{cases}$$

तब $\mathrm{Var}(I_4)$ निम्न है

1. $\frac{33}{169}$
2. $\frac{34}{169}$
3. $\frac{35}{169}$
4. $\frac{36}{169}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

61 706541

For a real number x, let $[x]$ denote the largest integer $\leq x$. Which of the following sets are uncountable?

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid [x] = 1\}$
2. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x - [x] = \frac{1}{2}\right\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, \sqrt{x} \in \mathbb{Q}\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}$

किसी वास्तविक संख्या x के लिए, मानें कि $[x]$ सबसे बड़ा पूर्णांक $\leq x$ है। निम्न में से कौन से समुच्चय अगणनीय हैं?

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid [x] = 1\}$
2. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x - [x] = \frac{1}{2}\right\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, \sqrt{x} \in \mathbb{Q}\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

62 706542

Let

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\}.$$

Which of the following statements are true?

1. $\sup A$ is finite.
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} < \sup A$
3. $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} = 2$
4. $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} = 3$

मानें कि

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\}.$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\sup A$ परिमित है।
2. $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} < \sup A$
3. $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} = 2$
4. $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} = 3$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

63 706543

Let $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ be a continuous function such that

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha < 1.$$

Let $S = \{c \in [0, \infty) \mid f(c) = c\}$. Which of the following statements are true?

1. S is empty.
2. S is non-empty.
3. f must be uniformly continuous.
4. f need not be uniformly continuous.

मानें कि $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ एक ऐसा सतत फलन है कि

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha < 1.$$

मानें कि $S = \{c \in [0, \infty) \mid f(c) = c\}$ है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. S रिक्त है।
2. S अरिक्त है।
3. f आवश्यकतः एकसमानत: सतत है।
4. f का एकसमानत: सतत होना आवश्यक नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

64 706544

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a uniformly continuous function. For each positive integer n and $x \in \mathbb{R}$, let g_n and h_n be defined by $g_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ and $h_n(x) = f(nx)$. Which of the following statements are necessarily true?

1. $(g_n)_{n \geq 1}$ converges uniformly on any compact subset of $\mathbb{R}$ but not on $\mathbb{R}$.
2. $(g_n)_{n \geq 1}$ converges uniformly on $\mathbb{R}$.
3. There exists a subsequence of $(h_n)_{n \geq 1}$ that converges uniformly on $\mathbb{R}$.
4. For every compact subset $K \subseteq \mathbb{R}$, there exists a subsequence of $(h_n)_{n \geq 1}$ that converges uniformly on K.

मानें कि $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एकसमानत: सतत फलन है। प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिए, तथा प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए g_n एवं h_n को क्रमशः $g_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ एवं $h_n(x) = f(nx)$ से परिभाषित करें। निम्न में से कौन से कथन अनिवार्यत: सत्य हैं?

1. $\mathbb{R}$ के सभी संहत उपसमुच्चयों पर $(g_n)_{n \geq 1}$ एकसमानत: अभिसरित होता है, किन्तु $\mathbb{R}$ पर नहीं।
2. $\mathbb{R}$ पर $(g_n)_{n \geq 1}$ एकसमानत: अभिसरित होता है।
3. $(h_n)_{n \geq 1}$ का कोई ऐसा उपानुक्रम होगा जो $\mathbb{R}$ पर अभिसरित होता है।
4. प्रत्येक संहत उपसमुच्चय $K \subseteq \mathbb{R}$ के लिए, $(h_n)_{n \geq 1}$ का कोई ऐसा उपानुक्रम होगा जो K पर एकसमानत: अभिसरित होता है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

65 706545

Consider the following functions on the interval $[0,1]$:

$$g(x) = \sin(\pi x), \quad h(x) = \cos(\pi(x-1)).$$

Which of the following statements are true?

1. $(x^n g(x))_{n\geq 1}$ converges uniformly on $[0,1]$.
2. $(x^n g(x))_{n\geq 1}$ does not converge uniformly on $[0,1]$.
3. $(x^n h(x))_{n\geq 1}$ converges uniformly on $[0,1]$.
4. $(x^n h(x))_{n\geq 1}$ does not converge uniformly on $[0,1]$.

अंतराल $[0,1]$ पर निम्न फलनों पर विचार करें:

$$g(x) = \sin(\pi x), \quad h(x) = \cos(\pi(x-1)).$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $[0,1]$ पर $(x^n g(x))_{n\geq 1}$ एकसमानत: अभिसरित होता है।
2. $[0,1]$ पर $(x^n g(x))_{n\geq 1}$ एकसमानत: अभिसरित नहीं होता है।
3. $[0,1]$ पर $(x^n h(x))_{n\geq 1}$ एकसमानत: अभिसरित होता है।
4. $[0,1]$ पर $(x^n h(x))_{n\geq 1}$ एकसमानत: अभिसरित नहीं होता है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

66 706546

Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a Riemann integrable function. Define

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [0,1].$$

Which of the following statements are necessarily true?

1. F is Riemann integrable.
2. If $F(x) = 0$ for all $x \in [0,1]$, then $f(x) = 0$ for all $x \in [0,1]$.
3. F is uniformly continuous on $[0,1]$.
4. F is differentiable on $(0,1)$.

मानें कि $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ एक रीमान समाकलनीय फलन है। परिभाषित करें

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [0,1].$$

निम्न में से कौन से कथन आवश्यकतः सत्य हैं?

1. F रीमान समाकलनीय हैं।
2. यदि सभी $x \in [0,1]$ के लिए $F(x) = 0$ है तब सभी $x \in [0,1]$ के लिए $f(x) = 0$ होगा।
3. $[0,1]$ पर F एकसमानत: सतत है।
4. $(0,1)$ पर F अवकलनीय है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

67 706547

Let μ denote the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ be a Lebesgue measurable function. For $n \geq 1$, let

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} \,:\, n - 1 \leq f(x) < n\}.$$

Suppose that

$$\sum_{n \geq 1} n^2 \mu(E_n) < \infty.$$

Which of the following statements are true?

1. $f \in L^1(\mathbb{R})$
2. $f \in L^2(\mathbb{R})$
3. $f \in L^4(\mathbb{R})$
4. $f \in L^\infty(\mathbb{R})$

मानें कि μ द्वारा $\mathbb{R}$ पर लेबेग माप निर्दिष्ट होता है तथा $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ कोई लेबेग मेय फलन है। मानें कि $n \geq 1$ के लिए

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} \,:\, n - 1 \leq f(x) < n\}.$$

मानें कि

$$\sum_{n \geq 1} n^2 \mu(E_n) < \infty.$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $f \in L^1(\mathbb{R})$
2. $f \in L^2(\mathbb{R})$
3. $f \in L^4(\mathbb{R})$
4. $f \in L^\infty(\mathbb{R})$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

68 706548

Let $\|\cdot\|$ denote the Euclidean norm on $\mathbb{R}^2$ and $\alpha \geq 0$. Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a function such that $|f(x)| \leq \|x\|^\alpha$. Which of the following statements are necessarily true?

1. f is differentiable at 0 when $\alpha > 1$.
2. f is differentiable at 0 when $\alpha = \frac{1}{2}$.
3. f is continuous at 0 when $\alpha = 0$.
4. f is continuous at 0 when $\alpha > 0$.

मानें कि $\mathbb{R}^2$ पर यूक्लिडीय मानक $\|\cdot\|$ द्वारा इंगित होती है तथा $\alpha \geq 0$ है। मानें कि $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ऐसा फलन है जिसके लिए $|f(x)| \leq \|x\|^\alpha$ है। निम्न कथनों में से कौन से आवश्यकतः सत्य हैं?

1. 0 पर f अवकलनीय है जब $\alpha > 1$ हो।
2. 0 पर f अवकलनीय है जब $\alpha = \frac{1}{2}$ हो।
3. 0 पर f सतत है जब $\alpha = 0$ हो।
4. 0 पर f सतत है जब $\alpha > 0$ हो।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

69 706549

Let g be a real-valued continuous function on the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ such that $g(0,1) = g(1,0) = 0$ and $g(-x,-y) = -g(x,y)$. Define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ by

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\, g\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

For each $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, define $h_{(a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by $h_{(a,b)}(t) = f(ta, tb)$. Which of the following statements are necessarily true?

1. The function $h_{(a,b)}$ is differentiable on $\mathbb{R}$ for each $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. There exists $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ such that $h_{(a,b)}$ is not differentiable at $t = 0$.
3. The function f is differentiable at the point $(0,0)$.
4. If the function f is differentiable at $(0,0)$ then g is identically zero.

मानें कि समुच्चय $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ पर वास्तविक मान वाला ऐसा सतत फलन g है जिसके लिए $g(0,1) = g(1,0) = 0$ तथा $g(-x,-y) = -g(x,y)$ है। $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ को निम्न से परिभाषित करें

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\, g\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{यदि } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

प्रत्येक $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ के लिए $h_{(a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को $h_{(a,b)}(t) = f(ta, tb)$ से परिभाषित करें। निम्न कथनों में से कौन से आवश्यकतः सत्य हैं?

1. प्रत्येक $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ के लिए $\mathbb{R}$ पर फलन $h_{(a,b)}$ अवकलनीय है।
2. ऐसा कोई $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ है, कि $t=0$ पर $h_{(a,b)}$ अवकलनीय नहीं है।
3. बिन्दु $(0,0)$ पर फलन f अवकलनीय है।
4. यदि $(0,0)$ पर फलन f अवकलनीय है तो g सर्वत्र शून्य होगा।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

70 706550

Consider the real vector space $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$, along with the norms $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$ defined by

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \quad \text{and} \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

For $n \geq 1$ and $x \in [0,1]$, let $f_n(x) = nx^n$. Which of the following statements are true?

1. $(\|f_n\|_1)$ is a convergent sequence.
2. $(\|f_n\|_2)$ is a convergent sequence.
3. Both $(\|f_n\|_1)$ and $(\|f_n\|_2)$ are convergent sequences.
4. Neither $(\|f_n\|_1)$ nor $(\|f_n\|_2)$ is a convergent sequence.

वास्तविक सदिश समष्टि $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ सतत है}\}$ पर मानक $\|\cdot\|_1$ तथा $\|\cdot\|_2$ निम्नवत् परिभाषित हैं

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \quad \text{तथा} \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

मानें कि $f_n(x) = nx^n$, जहाँ $n \geq 1$ तथा $x \in [0,1]$ है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $(\|f_n\|_1)$ एक अभिसारी अनुक्रम है।
2. $(\|f_n\|_2)$ एक अभिसारी अनुक्रम है।
3. $(\|f_n\|_1)$ तथा $(\|f_n\|_2)$ दोनों अभिसारी अनुक्रम हैं।
4. न तो $(\|f_n\|_1)$ और न ही $(\|f_n\|_2)$ अभिसारी अनुक्रम है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

71 706551

For each $n > 1$, let V denote the $\mathbb{C}$-vector space of all $n \times n$ complex matrices and $A \in V$. Which of the following statements are necessarily true?

1. The set $\{I, A, \ldots, A^n\}$ is linearly independent but the set $\{I, A, \ldots, A^{n^2}\}$ is not linearly independent.
2. If A is a singular matrix, then the set $\{I, A, \ldots, A^k\}$ spans a $(k+1)$-dimensional subspace of V for all $k \leq \text{rank}(A)$.
3. The sets $\{I, A, \ldots, A^n\}$ and $\{I, A, \ldots, A^{n^2}\}$ both span the same subspace of V.
4. The set $\{I, A, \ldots, A^n\}$ is linearly dependent.

प्रत्येक $n > 1$ के लिए, मानें कि V सभी $n \times n$ सम्मिश्र आव्यूहों की $\mathbb{C}$-सदिश समष्टि है तथा $A \in V$ है। निम्न कथनों में से कौन से आवश्यकतः सत्य हैं?

1. समुच्चय $\{I, A, \ldots, A^n\}$ रैखिकत: स्वतंत्र है लेकिन समुच्चय $\{I, A, \ldots, A^{n^2}\}$ रैखिकत: स्वतंत्र नहीं है।
2. यदि A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तब सभी $k \leq \text{rank}(A)$ के लिए समुच्चय $\{I, A, \ldots, A^k\}$ की V में विस्तरित उपसमष्टि $(k+1)$-विमीय है।
3. समुच्चय $\{I, A, \ldots, A^n\}$ तथा $\{I, A, \ldots, A^{n^2}\}$ दोनों की V में विस्तरित उपसमष्टियाँ समान हैं।
4. समुच्चय $\{I, A, \ldots, A^n\}$ रैखिकत: अस्वतंत्र है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

72 706552

For each $n > 1$, let V be the $\mathbb{R}$-vector space of all $n \times n$ real matrices and $A \in V$ be invertible. Consider the $\mathbb{R}$-linear transformation $\phi : \mathbb{R}[x] \to V$ such that $\phi(x^k) = A^k$ for all $k \geq 1$ and $\phi(1)$ is the identity matrix of order n. Which of the following statements are necessarily true?

1. ϕ is one-to-one but not onto.
2. ϕ is onto but not one-to-one.
3. There exists $f \in \mathbb{R}[x]$ such that $\deg f \leq n$ and $\ker \phi = \{fg \mid g \in \mathbb{R}[x]\}$.
4. $\deg h \geq n$ for every nonzero $h \in \ker \phi$.

प्रत्येक $n > 1$ के लिए V को सभी $n \times n$ वास्तविक आव्यूहों की $\mathbb{R}$-सदिश समष्टि मानें तथा मानें कि $A \in V$ व्युत्क्रमणीय है। एक $\mathbb{R}$-रैखिक रूपांतरण $\phi : \mathbb{R}[x] \to V$ पर विचार करें, जहाँ सभी $k \geq 1$ के लिए $\phi(x^k) = A^k$ है, तथा $\phi(1)$ कोटि n का तत्समक आव्यूह है। निम्न कथनों में से कौन से आवश्यकतः सत्य हैं?

1. ϕ एकैकी है लेकिन आच्छादक नहीं है।
2. ϕ आच्छादक है लेकिन एकैकी नहीं है।
3. ऐसा कोई $f \in \mathbb{R}[x]$ है जिसके लिए $\deg f \leq n$ तथा $\ker \phi = \{fg \mid g \in \mathbb{R}[x]\}$ है।
4. प्रत्येक शून्येतर $h \in \ker \phi$ के लिए $\deg h \geq n$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

73 706553

Let $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be a $\mathbb{C}$-linear transformation. For any ordered basis $\mathcal{B}$ of $\mathbb{C}^2$, let $[T]_{\mathcal{B}}$ denote the matrix of T with respect to $\mathcal{B}$. Suppose that $\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{B}_2$ are two ordered bases of $\mathbb{C}^2$ such that the matrix $[T]_{\mathcal{B}_1}$ is upper-triangular and $[T]_{\mathcal{B}_2} = ([T]_{\mathcal{B}_1})^2$. Which of the following statements are **FALSE**?

1. The characteristic polynomial of T can be $x^2 + x + 1$.
2. The characteristic polynomial of T can be $x(x-1)$.
3. The minimal polynomial of T can be x^2.
4. The characteristic polynomial of T can be $x(x - e^{\frac{2\pi i}{3}})$.

मानें कि $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ एक $\mathbb{C}$-रैखिक रूपांतरण है। $\mathbb{C}^2$ के किसी भी क्रमित आधार $\mathcal{B}$ के लिए, $\mathcal{B}$ के सापेक्ष T के आव्यूह को $[T]_{\mathcal{B}}$ से निर्दिष्ट करें। मानें कि $\mathcal{B}_1$ तथा $\mathcal{B}_2$ इस प्रकार से $\mathbb{C}^2$ के दो क्रमित आधार हैं कि आव्यूह $[T]_{\mathcal{B}_1}$ उपरि-त्रिभुजीय है तथा $[T]_{\mathcal{B}_2} = ([T]_{\mathcal{B}_1})^2$ है। निम्न कथनों में से कौन से **असत्य** हैं?

1. T का अभिलक्षणिक बहुपद $x^2 + x + 1$ हो सकता है।
2. T का अभिलक्षणिक बहुपद $x(x-1)$ हो सकता है।
3. T का अल्पिष्ठ पद x^2 हो सकता है।
4. T का अभिलक्षणिक बहुपद $x(x - e^{\frac{2\pi i}{3}})$ हो सकता है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

74 706554

Let $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ be an $\mathbb{R}$-linear transformation. Assume that the characteristic polynomial of T has two distinct monic irreducible quadratic factors $q_1(x)$ and $q_2(x)$. Which of the following statements are true?

1. There exists a nonzero $v \in \mathbb{R}^4$ such that $q_1(T)v = 0$.
2. There exists a nonzero $v \in \mathbb{R}^4$ such that $q_1(T)v = 0$ and $q_2(T)v = 0$.
3. For all nonzero $v \in \mathbb{R}^4$, v and Tv are linearly independent.
4. If $q_1(T)v = 0$ for some nonzero $v \in \mathbb{R}^4$, then $\{v, Tv, T^2v, T^3v\}$ is a basis of $\mathbb{R}^4$.

एक $\mathbb{R}$-रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ लें जिसके दो भिन्न एकगुणांकी अखंडनीय द्विघात खण्ड $q_1(x)$ तथा $q_2(x)$ हैं। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. कोई ऐसा शून्येतर $v \in \mathbb{R}^4$ है जिसके लिए $q_1(T)v = 0$ है।
2. कोई ऐसा शून्येतर $v \in \mathbb{R}^4$ है जिसके लिए $q_1(T)v = 0$ तथा $q_2(T)v = 0$ है।
3. सभी शून्येतर $v \in \mathbb{R}^4$ के लिए v तथा Tv रैखिकत: स्वतंत्र हैं।
4. यदि किसी शून्येतर $v \in \mathbb{R}^4$ के लिए $q_1(T)v = 0$ हो , तो $\{v, Tv, T^2v, T^3v\}$, समष्टि $\mathbb{R}^4$ का एक आधार है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

75 706555

Which of the following statements are true?

1. There exists a 5×5 real matrix whose minimal polynomial is $(x^2+x+1)x^3$.
2. There exists a 5×5 real matrix whose minimal polynomial is $(x^2+x+1)^2$.
3. There exists a 5×5 complex matrix whose minimal polynomial is $(x^2+x+1)^2x$.
4. There exists a 5×5 complex matrix whose minimal polynomial is $(x^2+x+1)^2$.

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. ऐसा कोई 5×5 वास्तविक आव्यूह है जिसका अल्पिष्ठ बहुपद $(x^2+x+1)x^3$ है।
2. ऐसा कोई 5×5 वास्तविक आव्यूह है जिसका अल्पिष्ठ बहुपद $(x^2+x+1)^2$ है।
3. ऐसा कोई 5×5 सम्मिश्र आव्यूह है जिसका अल्पिष्ठ बहुपद $(x^2+x+1)^2x$ है।
4. ऐसा कोई 5×5 सम्मिश्र आव्यूह है जिसका अल्पिष्ठ बहुपद $(x^2+x+1)^2$ है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

76 706556

Let n be a positive integer and A, B be $n \times n$ complex matrices such that the minimal polynomials of A and B are the same. Which of the following conditions ensure that A is similar to B?

1. $n = 3$ and the characteristic polynomials of A and B are the same.
2. $n = 4$ and A has two distinct eigenvalues.
3. $n = 5$ and A has some eigenvalue for which the dimensions of the eigenspaces of A and B are the same.
4. $n = 6$ and A has only one eigenvalue and for this eigenvalue the dimensions of the eigenspaces of A and B are the same.

एक धनात्मक पूर्णांक n के लिए ऐसे $n \times n$ सम्मिश्र आव्यूह A, B लीजिए जिनके अल्पिष्ठ बहुपद सामान हैं। निम्न में से कौन सी शर्तें सुनिश्चित करती हैं कि A तथा B समरूप हैं?

1. $n = 3$ है तथा A एवं B के अभिलक्षणिक बहुपद समान हैं।
2. $n = 4$ है तथा A के दो भिन्न अभिलक्षणिक मान हैं।
3. $n = 5$ है तथा A का कोई अभिलक्षणिक मान ऐसा है जिसके लिए A तथा B की अभिलक्षणिक समष्टियों की विमाएं समान है।
4. $n = 6$ है तथा A का केवल एक अभिलक्षणिक मान है व इस अभिलक्षणिक मान के लिए A तथा B की अभिलक्षणिक समष्टियों की विमाएं समान है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

77 706557

Let $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ be an inner product space over $\mathbb{C}$ and $T : V \to V$ be a $\mathbb{C}$-linear transformation. Let v_1 and v_2 be non-zero vectors in V such that $Tv_1 = c_1 v_1$ and $Tv_2 = c_2 v_2$ for some $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Let

$$v_3 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

Suppose that v_3 is non-zero and $Tv_3 = c_3 v_3$ for some $c_3 \in \mathbb{C}$. Which of the following statements are true?

1. The set $\{v_1, v_2\}$ is linearly independent.
2. If $c_1 \neq c_2$, then $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.
3. If $c_1 = c_2$, then $c_3 = c_2$.
4. If $c_1 \neq c_2$, then $c_3 = c_2$.

एक आंतरिक गुणनफल समष्टि $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, जो कि $\mathbb{C}$ पर परिभाषित है, पर एक $\mathbb{C}$-रैखिक रूपांतरण $T : V \to V$ लें। समष्टि V में ऐसे शून्येतर सदिश v_1 तथा v_2 लें कि किन्हीं $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ के लिए $Tv_1 = c_1 v_1$ तथा $Tv_2 = c_2 v_2$ है। मानें कि

$$v_3 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

यदि v_3 शून्येतर है तथा किसी $c_3 \in \mathbb{C}$ के लिए $Tv_3 = c_3 v_3$ है तो निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. समुच्चय $\{v_1, v_2\}$ रैखिकत: स्वतंत्र है।
2. यदि $c_1 \neq c_2$ हो , तब $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ है।
3. यदि $c_1 = c_2$ हो , तब $c_3 = c_2$ है।
4. यदि $c_1 \neq c_2$ हो , तब $c_3 = c_2$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

78 706558

Let V be a two-dimensional real vector space with a basis $\{v_1, v_2\}$. Let $f : V \times V \to \mathbb{R}$ be a symmetric bilinear form. Let $r = f(v_1, v_1)$, $s = f(v_1, v_2)$, $t = f(v_2, v_2)$. Which of the following statements are necessarily true?

1. $f(v_2, v_1) = -s$.
2. If $r = s = t$, then either $f(v, v) \geq 0$ for all $v \in V$ or $f(v, v) \leq 0$ for all $v \in V$.
3. If f is positive definite, then $r \neq s$, $s \neq t$ and $r \neq t$.
4. If f is positive definite, then $f(v_1, v_2) = 0$.

एक द्विविमीय वास्तविक सदिश समष्टि V लें जिसका एका आधार $\{v_1, v_2\}$ है। मानें कि $f : V \times V \to \mathbb{R}$ एक सममित द्विरैखिक रूप है। यदि $r = f(v_1, v_1)$, $s = f(v_1, v_2)$, व $t = f(v_2, v_2)$ हो तो निम्न कथनों में से कौन से आवश्यकतः सत्य हैं?

1. $f(v_2, v_1) = -s$
2. यदि $r = s = t$ हो, तब या तो सभी $v \in V$ के लिए $f(v, v) \geq 0$ है या सभी $v \in V$ के लिए $f(v, v) \leq 0$ है।
3. यदि f धनात्मक निश्चित हो, तब $r \neq s$, $s \neq t$ तथा $r \neq t$ है।
4. यदि f धनात्मक निश्चित हो, तब $f(v_1, v_2) = 0$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

79 706559

Let $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ be a non-zero holomorphic function such that

$$|f(z)| \leq |z|^{5/2} + \frac{1}{|z|^{1/2}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Which of the following statements are true?

1. f has a pole at $z = 0$.
2. There is an entire function g such that $f = g$ on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. f is a polynomial of degree at most 2.
4. f has an essential singularity at $z = 0$.

मानें कि $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ऐसा शून्येतर होलोमार्फिक फलन है कि

$$|f(z)| \leq |z|^{5/2} + \frac{1}{|z|^{1/2}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. f का $z = 0$ पर ध्रुव है।
2. कोई सर्वत्र वैश्लषिक फलन g इस प्रकार है कि $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ पर $f = g$ होगा।
3. f अधिक से अधिक घात 2 का बहुपद है।
4. f की $z = 0$ पर अनिवार्य विचित्रता है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

80	706560

Consider the disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and a non-constant holomorphic function $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Suppose that $f(0) = 0$. For each $n \geq 1$ and $z \in \mathbb{D}$, define $f_n(z) = f(z^n)$. Which of the following statements are true?

1. The series $\sum_{n\geq 1} f_n$ converges only at $z = 0$.
2. The series $\sum_{n\geq 1} f_n$ converges pointwise only on a countable set $E \subseteq \mathbb{D}$ but not on $\mathbb{D} \setminus E$.
3. The series $\sum_{n\geq 1} f_n$ converges pointwise at all points of $\mathbb{D}$ but not uniformly on some compact subsets of $\mathbb{D}$.
4. The series $\sum_{n\geq 1} f_n$ converges uniformly on all compact subsets of $\mathbb{D}$ to a holomorphic function on $\mathbb{D}$.

चक्रिका $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ पर $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ कोई अचरेतर होलोमार्फिक फलन है। मानें कि $f(0) = 0$ है। प्रत्येक $n \geq 1$ तथा $z \in \mathbb{D}$ के लिए $f_n(z) = f(z^n)$ परिभाषित करें। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. श्रेणी $\sum_{n\geq 1} f_n$ केवल $z = 0$ पर अभिसरण करती है।
2. श्रेणी $\sum_{n\geq 1} f_n$ केवल गणनीय समुच्चय $E \subseteq \mathbb{D}$ पर बिंदुबार अभिसरित होती है, लेकिन $\mathbb{D} \setminus E$ पर नहीं।
3. श्रेणी $\sum_{n\geq 1} f_n$, चक्रिका $\mathbb{D}$ के सभी बिंदुओं पर बिंदुवार अभिसरित होती है लेकिन $\mathbb{D}$ के कुछ संहत उपसमुच्चयों पर एकसमानतः नहीं।
4. श्रेणी $\sum_{n\geq 1} f_n$, चक्रिका $\mathbb{D}$ के सभी संहत उपसमुच्चयों पर ऐसे फलन पर एकसमानत: अभिसारित होती है जो $\mathbb{D}$ पर होलोमॉर्फिक है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

81	706561

For $z = x + iy \in \mathbb{C}$, let

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

be an entire function such that

$$u(x, y) + v(x, y) = 1$$

Which of the following statements are **FALSE**?

1. f is a constant function.
2. If $f(0) \in \mathbb{R}$, then $f(0) + f(1) = 1$.
3. $f(\mathbb{C})$ is connected.
4. If $f(2) \in \mathbb{R}$, then $f(i) + f(1) = 2$.

सभी $z = x + iy \in \mathbb{C}$ के लिए

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

से परिभाषित ऐसे सर्वत्र वैश्लेषिक फलन को लें जिसके लिए

$$u(x, y) + v(x, y) = 1$$

है। निम्न कथनों में से कौन से **असत्य** हैं?

1. f एक अचर फलन है।
2. यदि $f(0) \in \mathbb{R}$, तब $f(0) + f(1) = 1$ होगा।
3. $f(\mathbb{C})$ संबद्ध है।
4. यदि $f(2) \in \mathbb{R}$, तब $f(i) + f(1) = 2$ होगा।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

82 706562

Let $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ be a polynomial of degree ≥ 3. Suppose that $p(0) = 0$ and $p'(0) \neq 0$. Let $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ be defined by

$$f(z) = \frac{p(z)}{z^2}.$$

Which of the following statements are true?

1. f has a removable singularity at $z = 0$.
2. f has a simple pole at $z = 0$.
3. $\int_C \frac{p(z)}{z} dz = 0$, where C is any counterclockwise oriented smooth closed curve in $\mathbb{C}$.
4. $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i a_1$, where $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2025\}$ is a counterclockwise oriented circle.

घात ≥ 3 का एक बहुपद $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ लें। मानें कि $p(0) = 0$ तथा $p'(0) \neq 0$ है। यदि $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ को निम्नवत् परिभाषित करते हैं

$$f(z) = \frac{p(z)}{z^2}.$$

तो निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. f की $z = 0$ पर अपनेय विचित्रता है।
2. f का $z = 0$ पर सरल ध्रुव है।
3. $\mathbb{C}$ मे कोई भी वामावर्ती अभिविन्यस्त संवृत मसृण वक्र C पर $\int_C \frac{p(z)}{z} dz = 0$ होगा।
4. वामावर्ती अभिविन्यस्त वृत्त $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2025\}$ पर $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i a_1$ है।।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

83 706563

Let G be a finite group. For any prime number p, let $E(p) = \{g \in G \mid g^p = 1\}$. Which of the following statements are true?

1. If p divides $|G|$, then $E(p)$ is a subgroup of G.
2. For all p, $E(p)$ is a subgroup of G.
3. If $E(p)$ is a subgroup of G, then p divides $|G|$.
4. If G is abelian, then $E(p)$ is a subgroup of G.

एक परिमित समूह G लीजिए। किसी भी अभाज्य संख्या p के लिए, मानें कि $E(p) = \{g \in G \mid g^p = 1\}$ है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि p के द्वारा $|G|$ विभाजित होता है, तब $E(p)$ समूह G का उपसमूह है।
2. सभी p के लिए $E(p)$ समूह G का उपसमूह है।
3. यदि $E(p)$ समूह G का उपसमूह है तब p द्वारा $|G|$ विभाजित होता है।
4. यदि G आबेली है, तब $E(p)$ समूह G का उपसमूह है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

84 706564

An abelian group G is said to have property (P) if for any subgroup N of G, there exists a subgroup H of G such that $G = N + H$ and $N \cap H = \{0\}$. Which of the following statements are true?

1. If an abelian group G has property (P), every subgroup of G has property (P).
2. If an abelian group G has property (P), then every element of G has finite order.
3. The group $\mathbb{Z}$ has property (P).
4. If an abelian group G has property (P), then no element has order p^2, where p is a prime number.

एक आबेली समूह G के लिए हमे कहेंगे की उसमें गुण (P) है यदि G के किसी भी उपसमूह N के लिए G का ऐसा उपसमूह H मिलेगा ताकि $G = N + H$ हो व $N \cap H = \{0\}$ हो। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि किसी आबेली समूह में गुण (P) है, तो G के हर उपसमूह में गुण (P) है।
2. यदि किसी आबेली समूह में गुण (P) है, तो G के हर अवयव की कोटि परिमित है।
3. समूह $\mathbb{Z}$ में गुण (P) है।
4. यदि किसी आबेली समूह में गुण (P) है, तब किसी भी अभाज्य संख्या p के लिए किसी भी अवयव की कोटि p^2 नहीं है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

85 706565

Which of the following rings are integral domains?

1. The ring of polynomials in 3 variables over $\mathbb{R}$.
2. The ring of complex analytic functions on the open unit disc in $\mathbb{C}$.
3. The ring of 2×2 real matrices.
4. The ring of continuous functions from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$.

निम्न वलयों में से कौन से पूर्णांकीय प्रांत हैं?

1. $\mathbb{R}$ पर 3 चरों के बहुपदों का वलय
2. $\mathbb{C}$ में विवृत एकक चक्रिका पर सम्मिश्र वैश्लेषिक फलनों का वलय
3. 2×2 वास्तविक आव्यूहों का वलय
4. $[0, 1]$ से $\mathbb{R}$ तक सतत फलनों का वलय

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

86 706566

For a finite group G, let $S(G)$ denote the set of all its Sylow subgroups. A finite group G is said to have property (J) if G is isomorphic to the direct product $\prod_{H \in S(G)} H$. Which of the following statements are true?

1. Any group with $p(p+2)$ elements, where p and $p+2$ are both prime numbers, has property (J).
2. Any finite abelian group has property (J).
3. The symmetric group S_3 has property (J).
4. Any group with 77 elements has property (J).

परिमित समूह G के लिए मानें कि $S(G)$ इसके सभी साइलो (Sylow) उपसमूहों के समूह को इंगित करता है। परिमित समूह G में गुण (J) माना जाता है यदि G, अनुलोम गुणनफल $\prod_{H \in S(G)} H$ के तुल्याकारी है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $p(p+2)$ अवयवों वाले किसी भी समूह में, जहां p तथा $p+2$ दोनों अभाज्य संख्यायें हैं, गुण (J) है।
2. किसी भी परिमित आबेली समूह में गुण (J) है।
3. सममित समूह S_3 में गुण (J) है।
4. 77 अवयवों के किसी भी समूह में गुण (J) है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

87 706567

Which of the following quotient rings are fields?

1. $\mathbb{Q}[x]/\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$
2. $\mathbb{Q}[x]/\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$
3. $\mathbb{Z}[x]/\left(x-101\right)$
4. $\mathbb{Q}[x]/\left(x^{43}-41x+41\right)$

निम्न विभाग वलयों में कौन से क्षेत्र हैं ?

1. $\mathbb{Q}[x]/\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$
2. $\mathbb{Q}[x]/\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$
3. $\mathbb{Z}[x]/\left(x-101\right)$
4. $\mathbb{Q}[x]/\left(x^{43}-41x+41\right)$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

88 706568

Which of the following statements are true?

1. If K is the splitting field of a non-constant polynomial over $\mathbb{Q}$, then K is Galois over $\mathbb{Q}$.
2. If K is a normal extension of $\mathbb{Q}$, then K is Galois over $\mathbb{Q}$.
3. If K is the set of all the roots of the polynomial $x^{121} - x$ in an algebraic closure of $\mathbb{F}_{11}$, then K is Galois over $\mathbb{F}_{11}$, where $\mathbb{F}_{11}$ is the field with 11 elements.
4. If $K = \mathbb{Q}(2^{1/13}, \zeta_{13})$, where ζ_{13} is a primitive 13^{th} root of unity in $\mathbb{C}$, then K is Galois over $\mathbb{Q}$.

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि $\mathbb{Q}$ पर K अचरेतर बहुपद का विपाटक क्षेत्र है, तब $\mathbb{Q}$ पर K गाल्वा है।
2. यदि $\mathbb{Q}$ का प्रसामान्य विस्तार K है, तब $\mathbb{Q}$ पर K गाल्वा है।
3. यदि $\mathbb{F}_{11}$ के बीजीय संवरक में बहुपद $x^{121} - x$ के सभी मूलों का समुच्चय K है, तब $\mathbb{F}_{11}$ पर K गाल्वा है, जहां $\mathbb{F}_{11}$, 11 अवयवों वाला क्षेत्र है।
4. यदि $K = \mathbb{Q}(2^{1/13}, \zeta_{13})$, जहां $\mathbb{C}$ में इकाई का 13-वां पूर्वग मूल ζ_{13} है, तब $\mathbb{Q}$ पर K गाल्वा है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

89 706569

Consider $\mathbb{R}^2$ with the Euclidean metric d. Let $O = (0,0), P_0 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, and for any integer $n \geq 1$, $P_n = (1/n, 1) \in \mathbb{R}^2$. Let

$$X = \bigcup_{n \geq 0} L_n,$$

where L_n is the line segment joining P_n and O. Define $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ as follows:

$$d_X(a,b) = \begin{cases} d(a,b), & \text{when } a, b \in L_n \text{ for some } n, \\ d(a,O) + d(b,O), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let τ be the smallest topology such that the sets

$$B_{a,\epsilon} = \{b \in X : d_X(a,b) < \epsilon\}$$

are open in τ for all $a \in X$ and $\epsilon > 0$. Which of the following statements are true?

1. d_X is a metric on X which induces the topology τ.
2. The topological space (X, τ) is connected.
3. $(P_n)_{n \geq 1}$ converges to P_0 in the topological space (X, τ).
4. The topological space (X, τ) is compact.

यूक्लिडीय दूरीक d वाले $\mathbb{R}^2$ पर विचार करें। मानें कि $O = (0,0), P_0 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, तथा किसी भी पूर्णांक $n \geq 1$ लिए $P_n = (1/n, 1) \in \mathbb{R}^2$ है। मानें कि

$$X = \bigcup_{n \geq 0} L_n,$$

जहां L_n वह रेखाखंड है जो P_n तथा O को जोड़ता है। $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ को निम्नवत् परिभाषित करें

$$d_X(a,b) = \begin{cases} d(a,b), & \text{जब किसी } n \text{ के लिए } a, b \in L_n, \\ d(a,O) + d(b,O), & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

मानें कि लघुतम सांस्थितिकी τ इस प्रकार है कि सभी $a \in X$ तथा $\epsilon > 0$ के लिए समुच्चय

$$B_{a,\epsilon} = \{b \in X : d_X(a,b) < \epsilon\}$$

τ में विवृत है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. X पर d_X एक दूरीक है जो सांस्थितिकी τ को प्रेरित करता है।
2. सांस्थितिक समष्टि (X, τ) संबद्ध है।
3. सांस्थितिक समष्टि (X, τ) में $(P_n)_{n \geq 1}$, P_0 को अभिसरित होता है।
4. सांस्थितिक समष्टि (X, τ) संहत है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

90 706570

Let X and Y be topological spaces and $f : X \to Y$ be a continuous function. Which of the following statements are true?

1. If X and Y are compact, Y is Hausdorff and f is onto, then X is also Hausdorff.
2. If X is an infinite compact set and f is a homeomorphism from X to $f(X)$ (where $f(X)$ is given the subspace topology), then Y is compact.
3. If X is Hausdorff and f is onto, then Y is Hausdorff.
4. If f is a homeomorphism, then X is second-countable if and only if Y is second-countable.

मानें कि X तथा Y सांस्थितिक समष्टियाँ हैं तथा $f : X \to Y$ कोई सतत फलन है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि X तथा Y संहत हैं, Y हाउसडोर्फ है तथा f आच्छादी है, तब X भी हाउसडोर्फ है।
2. यदि X कोई अनंत संहत समुच्चय है तथा f, X से $f(X)$ को तुल्याकारिता है (जहां $f(X)$ को उपसमष्टि सांस्थितिकी दी गई है), तब Y भी संहत है।
3. यदि X हाउसडोर्फ है तथा f आच्छादी है, तब Y भी हाउसडोर्फ है।
4. यदि f तुल्याकारिता है, तब X तभी और केवल तभी द्वितीय-गणनीय है जबकि Y भी द्वितीय-गणनीय है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

91 706571

Consider the ordinary differential equation (ODE)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(e^{2x} - 1\right)\frac{dy}{dx} + \alpha e^{4x} y = 0,\ x \in \mathbb{R},$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$. Note that the ODE transforms into an equation with constant coefficients under the change of independent variable given by $t = \frac{e^{2x}}{2}$.

Then which of the following statements are true?

1. For $\alpha = 1$, all the solutions of the ODE tend to zero as $x \to \infty$
2. For $\alpha = 0$, there exists a solution of the ODE which tends to 1 as $x \to \infty$
3. For $\alpha = -1$, there exists an unbounded solution of the ODE on $\mathbb{R}$
4. For $\alpha = 2$, there exists an unbounded solution of the ODE on $\mathbb{R}$

निम्न साधारण अवकल समीकरण (ODE) पर विचार करें

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(e^{2x} - 1\right)\frac{dy}{dx} + \alpha e^{4x} y = 0,\ x \in \mathbb{R},$$

जहां $\alpha \in \mathbb{R}$ है। ध्यान दीजिए कि स्वतंत्र चर $t = \frac{e^{2x}}{2}$ द्वारा बदले जाने पर ODE नियत गुणांकों वाले समीकरण में रूपांतरित हो जाता है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\alpha = 1$ के लिए ODE के सभी हल शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं जब $x \to \infty$ हो।
2. $\alpha = 0$ के लिए ODE का कोई हल है, जो 1 की ओर प्रवृत्त होता है जब $x \to \infty$ हो।
3. $\alpha = -1$ के लिए $\mathbb{R}$ पर ODE का कोई अपरिबद्ध हल है।
4. $\alpha = 3$ के लिए $\mathbb{R}$ पर ODE का कोई अपरिबद्ध हल है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

92 706572

If $x = x(t)$, $y = y(t)$ is the solution of the initial value problem

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x - 3y + e^t,$$
$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 3x - 4y + 2e^t,$$
$$x(0) = -1,\ y(0) = -\frac{1}{2},$$

then which of the following statements are true?

1. $x(\pi) = -e^{\pi},\ \ y(\pi) = \frac{1}{2}$
2. $x(-\pi) = e^{-\pi},\ \ y(-\pi) = \frac{1}{2}$
3. x has infinitely many zeros in $\mathbb{R}$
4. y has infinitely many zeros in $\mathbb{R}$

यदि $x = x(t), y = y(t)$ निम्न आरंभिक मान समस्या का हल है

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x - 3y + e^t,$$
$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 3x - 4y + 2e^t,$$
$$x(0) = -1,\ y(0) = -\frac{1}{2},$$

तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $x(\pi) = -e^{\pi},\ \ y(\pi) = \frac{1}{2}$
2. $x(-\pi) = e^{-\pi},\ \ y(-\pi) = \frac{1}{2}$
3. x के $\mathbb{R}$ में अनंत शून्य हैं।
4. y के $\mathbb{R}$ में अनंत शून्य हैं।

A1 : 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

93 706573

Consider the boundary value problem (BVP)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + (\lambda+2)y = 0,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Then which of the following statements are true?

1. The BVP has a non-zero solution if $\lambda = 2$
2. The BVP has a non-zero solution if $\lambda = 3$
3. The BVP has a non-zero solution $y = y(x)$ satisfying $y\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ for every integer k if $\lambda = 6$
4. The BVP has a non-zero solution $y = y(x)$ satisfying $y\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$ for every integer k if $\lambda = 6$

निम्न परिसीमा मान समस्या (BVP) पर विचार करें

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + (\lambda+2)y = 0,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. BVP का शून्येतर हल है यदि $\lambda = 2$ हो
2. BVP का शून्येतर हल है यदि $\lambda = 3$ हो
3. BVP का शून्येतर हल ऐसा $y = y(x)$ है जो प्रत्येक पूर्णांक k के लिए $y\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ को संतुष्ट करता है, यदि $\lambda = 6$ हो
4. BVP का शून्येतर हल ऐसा $y = y(x)$ है जो प्रत्येक पूर्णांक k के लिए $y\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$ को संतुष्ट करता है, यदि $\lambda = 6$ हो

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

94 706574

Let $u = u(x,t)$ be the solution to the initial value problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R},$$

where f is a twice continuously differentiable function defined on $\mathbb{R}$ satisfying $f(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$. Then which of the following statements are true?

1. For every $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$
2. For every $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = \infty$
3. For every $t \in (0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0$
4. For every $t \in (0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x,t) = \infty$

मानें कि $u = u(x,t)$ निम्न आरंभिक मान समस्या का हल है

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R},$$

जहां $\mathbb{R}$ पर परिभाषित f द्वि-संतत: अवकलनीय फलन है, तथा $f(x) \to 0$ है जब $|x| \to \infty$ हो। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ है।
2. प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = \infty$ है।
3. प्रत्येक $t \in (0,\infty)$ के लिए $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0$ है।
4. प्रत्येक $t \in (0,\infty)$ के लिए $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x,t) = \infty$ है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

95 706575

Consider the partial differential equation

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Which of the following partial differential equations can be obtained by a change of ind pendent variables given by

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

for some 2×2 invertible matrix A with real entries?

1. $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$
2. $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$
3. $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$
4. $2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$

इस आंशिक अवकल समीकरण पर विचार करें

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

निम्न आंशिक अवकल समीकरणों में से कौन से, स्वतंत्र चरों को किसी वास्तविक प्रविष्टियों वाले 2×2 व्युत्क्रमणीय आव्यूहों A के लिये, निम्न तरह से बदल देने पर प्राप्त हो सकते हैं?

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$
2. $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$
3. $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$
4. $2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

96 706576

Consider the following statements:

S_1 : There exists an $\varepsilon > 0$ such that $\forall x_0 \in (2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$, the iterative sequence defined by $x_{n+1} = \dfrac{6}{5-x_n}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, converges to 2.

S_2 : There exists an $\varepsilon > 0$ such that $\forall x_0 \in (3-\varepsilon,\ 3+\varepsilon)$, the iterative sequence defined by $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+6}{5}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, converges to 3.

S_3 : There exists an $\varepsilon > 0$ such that $\forall x_0 \in (3-\varepsilon,\ 3+\varepsilon)$, the iterative sequence defined by $x_{n+1} = \dfrac{5x_n-6}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, converges to 3.

Then which of the following statements are true?

1. S_1 and S_2 are true but **NOT** S_3
2. S_2 and S_3 are true but **NOT** S_1
3. S_1 and S_3 are true but **NOT** S_2
4. Each of S_1, S_2, and S_3 is true

निम्न वक्तव्यों पर विचार करें

S_1 : कोई $\varepsilon > 0$ इस प्रकार है कि $\forall x_0 \in (2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$, पुनरावर्ती अनुक्रम $x_{n+1} = \dfrac{6}{5-x_n}$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ 2 पर अभिसरित होता है।

S_2 : कोई $\varepsilon > 0$ इस प्रकार है कि $\forall x_0 \in (3-\varepsilon,\ 3+\varepsilon)$, पुनरावर्ती अनुक्रम $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+6}{5}$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ 3 पर अभिसरित होता है।

S_3 : कोई $\varepsilon > 0$ इस प्रकार है कि $\forall x_0 \in (3-\varepsilon,\ 3+\varepsilon)$, पुनरावर्ती अनुक्रम $x_{n+1} = \dfrac{5x_n-6}{x_n}$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ 3 पर अभिसरित होता है।

तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. S_1 तथा S_2 सत्य हैं लेकिन S_3 सत्य **नहीं** है
2. S_2 तथा S_3 सत्य हैं लेकिन S_1 सत्य **नहीं** है
3. S_1 तथा S_3 सत्य हैं लेकिन S_2 सत्य **नहीं** है
4. S_1, S_2 तथा S_3 में से प्रत्येक सत्य है

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

97 706577

Let $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function such that f and its partial derivatives of orders less than or equal to 3 are continuous and bounded. Let $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ be the solution of

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y_0 ,$$

where $y_0 \in \mathbb{R}$. For $h > 0$, denote $t_j = jh$. Let Y_j be an approximation of $y(t_j)$, defined by

$$\begin{cases} Y_{j+1} = Y_j + ahf(t_j, Y_j) + bhf\big(t_{j+1}, Y_j + chf(t_j, Y_j)\big), \; 0 < (j+1)h < 1, \\ Y_0 = y_0, \end{cases}$$

where $a, b, c \in \mathbb{R}$. If there exists an $M > 0$ such that

$$\Big| y(t_{j+1}) - y(t_j) - ahf(t_j, y(t_j)) - bhf\big(t_{j+1}, y(t_j) + chf(t_j, y(t_j))\big) \Big| \le Mh^3,$$

for every $h > 0$, and every j with $0 \le (j+1)h < 1$, then

1. $a + b = 1$
2. $a + b = c$
3. $a + b + c = 0$
4. $a^2 + b^2 = c^2$

मानें कि $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ऐसा फलन है कि f, तथा उसके 3 या 3 से कम कोटि के आंशिक अवकलज, सतत तथा परिबद्ध हैं। मानें कि $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ निम्न का हल है

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y_0 ,$$

जहां $y_0 \in \mathbb{R}$ है। मानें की $h > 0$ के लिये $t_j = jh$ है। Y_j को $y(t_j)$ का सन्निकटन मानें जो निम्नवत् परिभाषित है

$$\begin{cases} Y_{j+1} = Y_j + ahf(t_j, Y_j) + bhf\big(t_{j+1}, Y_j + chf(t_j, Y_j)\big), \; 0 < (j+1)h < 1, \\ Y_0 = y_0, \end{cases}$$

जहां $a, b, c \in \mathbb{R}$ हैं। यदि $M > 0$ इस प्रकार से है कि प्रत्येक $h > 0$ तथा प्रत्येक j, जहाँ $0 \le (j+1)h < 1$ है, के लिए

$$\Big| y(t_{j+1}) - y(t_j) - ahf(t_j, y(t_j)) - bhf\big(t_{j+1}, y(t_j) + chf(t_j, y(t_j))\big) \Big| \le Mh^3$$

है, तब

1. $a + b = 1$
2. $a + b = c$
3. $a + b + c = 0$
4. $a^2 + b^2 = c^2$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

98 706578

Define $S := \{y \in \mathcal{C}^1[0,1] : y(0) = y(1) = 0\}$, $\|y\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |y(x)|$ for every $y \in S$, $B_0(0,\varepsilon) := \{y \in S : \|y\|_\infty < \varepsilon\}$, $B_1(0,\varepsilon) := \{y \in S : \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty < \varepsilon\}$. Consider the functional $J : S \to \mathbb{R}$ given by

$$J[y] = \int_0^1 \left[(y')^2 - 2x(y')^4\right] dx,$$

then there exists an $\varepsilon > 0$ such that

1. $J[y] \le J[0]$ for every $y \in B_0(0,\varepsilon)$
2. $J[y] \le J[0]$ for every $y \in B_1(0,\varepsilon)$
3. $J[y] \ge J[0]$ for every $y \in B_0(0,\varepsilon)$
4. $J[y] \ge J[0]$ for every $y \in B_1(0,\varepsilon)$

निम्न परिभाषाओं पर विचार करें $S := \{y \in \mathcal{C}^1[0,1] : y(0) = y(1) = 0\}$, प्रत्येक $y \in S$ के लिए $\|y\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |y(x)|$, व $B_0(0,\varepsilon) := \{y \in S : \|y\|_\infty < \varepsilon\}$, $B_1(0,\varepsilon) := \{y \in S : \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty < \varepsilon\}$ है। निम्न फलनक $J : S \to \mathbb{R}$ पर विचार करें

$$J[y] = \int_0^1 \left[(y')^2 - 2x(y')^4\right] dx,$$

तब ऐसा कोई $\varepsilon > 0$ है कि

1. प्रत्येक $y \in B_0(0,\varepsilon)$ के लिए $J[y] \le J[0]$ होगा।
2. प्रत्येक $y \in B_1(0,\varepsilon)$ के लिए $J[y] \le J[0]$ होगा।
3. प्रत्येक $y \in B_0(0,\varepsilon)$ के लिए $J[y] \ge J[0]$ होगा।
4. प्रत्येक $y \in B_1(0,\varepsilon)$ के लिए $J[y] \ge J[0]$ होगा।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

99 706579

Consider the variational problem

$$\text{minimize } J[y] = \int_0^1 \left[(y')^2 + 2025\, yy'\right] dx,$$

where $y(0)$ and $y(1)$ are free. Then which of the following statements are true?

1. There are infinitely many extremals
2. There are more than one but only finitely many extremals
3. There is no extremal
4. There is a unique extremal

निम्न विचरण समस्या पर विचार कीजिए

$$\text{minimize } J[y] = \int_0^1 \left[(y')^2 + 2025\, yy'\right] dx,$$

जहाँ $y(0)$ तथा $y(1)$ मुक्त हैं। तब निम्न वक्तव्यों में से कौन से सत्य हैं?

1. अनंत चरमक हैं।
2. चरमक एक से अधिक हैं लेकिन केवल परिमित संख्या में।
3. कोई चरमक नहीं हैं।
4. एक अद्वितीय चरमक है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

100 706580

The integral equation

$$u(x) = f(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+t)u(t)dt$$

has infinitely many solutions if

1. $f(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos 5x$
3. $f(x) = \sin x$
4. $f(x) = \sin 5x$

समाकल समीकरण

$$u(x) = f(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+t)u(t)dt$$

के अनंत हल हैं, यदि

1. $f(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos 5x$
3. $f(x) = \sin x$
4. $f(x) = \sin 5x$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

101 706581

Let $R(x,t)$ and $u(x)$ denote the resolvent kernel and the solution, respectively, of the Volterra integral equation

$$u(x) = e^x + 2\int_{\ln 6}^{x} e^{2(t-x)} u(t)dt.$$

Then which of the following statements are true?

1. $R(x,t) = 1$
2. $R(x,t) = e^{(t-x)}$
3. $u(\ln 8) = 10$
4. $u(\ln 7) = 9$

मानें कि $R(x,t)$ तथा $u(x)$ वोल्टेरा समीकरण की क्रमशः साधक अष्टि तथा हल को इंगित करते हैं

$$u(x) = e^x + 2\int_{\ln 6}^{x} e^{2(t-x)} u(t)dt.$$

तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $R(x,t) = 1$
2. $R(x,t) = e^{(t-x)}$
3. $u(\ln 8) = 10$
4. $u(\ln 7) = 9$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

102 706582

Consider a particle of mass m which is moving on a surface due to gravity. Suppose the Lagrangian of the particle in the cylindrical coordinates is given by

$$L = \frac{m}{2}\left[(1+4\alpha^2 r^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - m\alpha g r^2,$$

where α is a positive constant, and g is the acceleration due to gravity. If the particle is in circular motion, then

1. $|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{2}{g\alpha}}$
2. $|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{1}{g\alpha}}$
3. $|\dot{\theta}| = \sqrt{2g\alpha}$
4. $|\dot{\theta}| = \sqrt{g\alpha}$

द्रव्यमान m के एक कण पर विचार करें जो गुरूत्व के कारण किसी सतह पर गतिमान है। मानें कि बेलनी निर्देशाकों में कण का लग्रांजी निम्न से दिया जाता है

$$L = \frac{m}{2}\left[(1+4\alpha^2 r^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - m\alpha g r^2,$$

जहां α एक धनात्मक नियतांक है, तथा g गुरूत्वीय त्वरण है। यदि कण वृत्तीय गति में हैं, तब

1. $|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{2}{g\alpha}}$
2. $|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{1}{g\alpha}}$
3. $|\dot{\theta}| = \sqrt{2g\alpha}$
4. $|\dot{\theta}| = \sqrt{g\alpha}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

103 706583

Let $X_1, X_2 \ldots$ be a sequence of independent random variables with X_i following $N(0, 1+\frac{1}{i})$ distribution for all $i \in \mathbb{N}$. Let X be $N(0,1)$-random variable independent of $\{X_n : n \geq 1\}$. Then, which of the following statements are true?

1. X_n converges to X in probability as $n \to \infty$
2. X_n converges to X in distribution as $n \to \infty$
3. $X_n - X$ converges to Z in distribution as $n \to \infty$, where Z follows the distribution $N(0, 2)$.
4. $\frac{X}{|X_n|}$ converges to M in distribution as $n \to \infty$, where M follows standard Cauchy distribution.

मानें कि $X_1, X_2 \ldots$ स्वतंत्र यादृच्छिक चरों का अनुक्रम है जहां सभी $i \in \mathbb{N}$ के लिए X_i बंटन $N(0, 1+\frac{1}{i})$ का अनुसरण करता है। मानें कि X ऐसा $N(0,1)$-यादृच्छिक चर है जो $\{X_n : n \geq 1\}$ से स्वतंत्र है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. X_n प्रायिकता में X को अभिसरित होता है जब $n \to \infty$
2. X_n बंटन में X को अभिसरित होता है जब $n \to \infty$
3. $X_n - X$ बंटन में Z को अभिसरित होता है जब $n \to \infty$, जहां Z बंटन $N(0, 2)$ का अनुसरण करता है।
4. $\frac{X}{|X_n|}$ बंटन में M को अभिसरित होता है जब $n \to \infty$, जहां M मानक कॉशी बंटन का अनुसरण करता है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

104 706584

Let $U_1, U_2, \ldots$ be a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) $U(0, 1)$ random variables. Let $G_n = \left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)^{\frac{1}{n}}$ be the geometric mean of $U_1, U_2, \ldots, U_n$ for $n \in \mathbb{N}$. Let X_1 and X_2 be degenerate random variables such that $P(X_1 = 0) = 1$ and $P\left(X_2 = \frac{1}{e}\right) = 1$. Then, which of the following statements are true?

1. G_n converges in r-th mean to X_1 as $n \to \infty$, for any $r > 0$
2. G_n converges in probability to X_1 as $n \to \infty$
3. G_n converges in distribution to X_2 as $n \to \infty$
4. G_n converges in r-th mean to X_2 as $n \to \infty$, for any $r > 0$

मानें कि $U_1, U_2, \ldots$ स्वतंत्र एवं सर्वथासमानतः बंटित (i.i.d.) $U(0, 1)$ यादृच्छिक चरों का अनुक्रम है। $n \in \mathbb{N}$ के लिये $G_n = \left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)^{\frac{1}{n}}$ को $U_1, U_2, \ldots, U_n$ का ज्यामितीय माध्य मानें। मानें कि X_1 तथा X_2 ऐसे अपभ्रष्ट यादृच्छिक चर हैं कि $P(X_1 = 0) = 1$ तथा $P\left(X_2 = \frac{1}{e}\right) = 1$ है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. किसी भी $r > 0$ के लिए G_n, r-वें माध्य में X_1 को अभिसरित होता है, जब $n \to \infty$
2. G_n प्रायिकता में X_1 को अभिसरित होता है, जब $n \to \infty$
3. G_n बंटन में X_2 को अभिसरित होता है, जब $n \to \infty$
4. किसी भी $r > 0$ के लिए G_n, r-वें माध्य में X_2 को अभिसरित होता है, जब $n \to \infty$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

105 706585

Consider the Markov chain with state space $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ and the transition probability matrix P given by

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Then, which of the following statements are true?

1. The state space can be partitioned into exactly two equivalence classes.
2. States 0 and 2 are recurrent.
3. States 1 and 3 are recurrent.
4. State 4 is transient.

अवस्था समष्टि $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ वाली मार्कोव श्रृंखला जिसकी संक्रमण प्रायिकता आव्यूह P निम्नवत है, पर विचार करें

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. अवस्था समष्टि को यथातथ दो तुल्यता वर्गों में विभाजित कर सकते हैं।
2. अवस्थायें 0 तथा 2 पुनरावर्ती हैं।
3. अवस्थायें 1 तथा 3 पुनरावर्ती है।
4. अवस्था 4 अल्पस्थायी है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

106 706586

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent and identically distributed (i.i.d.) random variables such that for $x = 3, 4, \ldots,$

$$P(X_1 = \pm x) = \frac{1}{2cx^2 \ln(x)},$$

where $c = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x)}$. Then, which of the following statements are true?

1. $E(|X_1|) = \infty$
2. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0$ as $n \to \infty$
3. $E\left(\frac{1}{|X_1|}\right) < \infty$
4. $E(X_1^2) = \infty$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ को ऐसा स्वतंत्र एवं सर्वथासमानतः बंटित (i.i.d.) चर मानें कि $x = 3, 4, \ldots$ के लिये

$$P(X_1 = \pm x) = \frac{1}{2cx^2 \ln(x)},$$

जहां $c = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x)}$ है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $E(|X_1|) = \infty$
2. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0$ जब $n \to \infty$
3. $E\left(\frac{1}{|X_1|}\right) < \infty$
4. $E(X_1^2) = \infty$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

107 706587

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 3)$ be a random sample from a population with absolutely continuous cumulative distribution function $F(\cdot)$. The corresponding order statistics are $X_{1:n} < X_{2:n} < \cdots < X_{r:n} < \cdots < X_{n:n}$. Define, for $r = 2, 3$, $Y_{r,n} = nF(X_{r:n})$. Suppose that $Y_{r,n}$ converges in distribution to a random variable Y_r as $n \to \infty$, $r = 2, 3$. Then, which of the following statements are true?

1. Y_3 follows gamma distribution with $E(Y_3) = 3$.
2. $E(Y_{2,n}) \to 2$ as $n \to \infty$
3. Y_2 follows beta distribution with $E(Y_2) = \frac{1}{2}$.
4. $Y_{3,n}$ follows beta distribution with parameters 3 and $n-1$.

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 3)$ निरपेक्षत: संतत संचयी बंटन फलन $F(\cdot)$ वाली समष्टि में से यादृच्छिक प्रतिदर्श है। संगत क्रम-प्रतिदर्शज $X_{1:n} < X_{2:n} < \cdots < X_{r:n} < \cdots < X_{n:n}$ हैं। $r = 2, 3,$ के लिए $Y_{r,n} = nF(X_{r:n})$ परिभाषित करें। मानें कि $r = 2, 3$ के लिए जब $n \to \infty$ तब $Y_{r,n}$ बंटन मे, यादृच्छिक चर Y_r में अभिसरित होता है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. Y_3 गामा बंटन का अनुसरण करता है जिसका $E(Y_3) = 3$
2. $E(Y_{2,n}) \to 2$ जब $n \to \infty$
3. Y_2 बीटा बंटन का अनुसरण करता है जिसका $E(Y_2) = \frac{1}{2}$
4. $Y_{3,n}$ बीटा बंटन का अनुसरण करता है जिसके प्राचल 3 तथा $n-1$ हैं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

108 706588

Let X and Y be independent random variables with the moment generating functions

$$M_X(t) = \frac{1}{9}(2 + e^t)^2, \ \ t \in \mathbb{R} \ \text{ and } \ M_Y(t) = \exp\left[e^t - 1\right], \ \ t \in \mathbb{R},$$

respectively. Then, which of the following statements are true?

1. $P(XY = 0) = \frac{4+5e^{-1}}{9}$
2. $E\left[(3X - Y)^2\right] = 6$
3. $\text{Var}(X + Y) = 2$
4. $\text{Cov}(2X + Y, X - 2Y) = -\frac{10}{9}$

मानें कि X तथा Y स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं जिनके आघूर्ण जनक फलन क्रमशः

$$M_X(t) = \frac{1}{9}(2 + e^t)^2, \ \ t \in \mathbb{R} \ \ \text{व} \ \ M_Y(t) = \exp\left[e^t - 1\right], \ \ t \in \mathbb{R}$$

हैं। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $P(XY = 0) = \frac{4+5e^{-1}}{9}$
2. $E\left[(3X - Y)^2\right] = 6$
3. $\text{Var}(X + Y) = 2$
4. $\text{Cov}(2X + Y, X - 2Y) = -\frac{10}{9}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

109 706589

Let X, Y, Z be independent and identically distributed (i.i.d.) random variables, each following Bernoulli(θ), $0 < \theta < 1$. Then, which of the following statements are true?

1. $(79X + 2024Y, 23Z^2)$ is a sufficient statistic for θ.
2. $13(X + Y + Z)^3$ is a minimal sufficient statistic for θ .
3. $2(X + Y + Z)$ is a complete sufficient statistic for θ .
4. $(X - 2Y + Z)$ is an ancillary statistic.

मानें कि X, Y, Z स्वतंत्र एवं सर्वथासमानतः बंटित (i.i.d.) यादृच्छिक चर हैं जिनमें से प्रत्येक बर्नूली(θ), $0 < \theta < 1$ का अनुसरण करता है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. θ के लिए एक पर्याप्त प्रतिदर्शज $(79X + 2024Y, 23Z^2)$ है।
2. θ के लिए एक अल्पिष्ठ पर्याप्त प्रतिदर्शज $13(X + Y + Z)^3$ है।
3. θ के लिए एक पूर्ण पर्याप्त प्रतिदर्शज $2(X + Y + Z)$ है।
4. $(X - 2Y + Z)$ एक सहायक प्रतिदर्शज है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

110 706590

The life (in hours) of an electrical component is exponentially distributed with mean $\theta > 0$. For testing $H_0 : \theta = \frac{5}{\ln(10)-\ln(9)}$ against $H_1 : \theta = \frac{5}{\ln(2)}$, three such components are chosen at random. Suppose that we reject the null hypothesis H_0 if and only if two or more of these three components survive for less than five hours. Then, which of the following statements are true?

1. The size of the test is 0.01 .
2. The power of the test is 0.5 .
3. The test is unbiased at level $\alpha = 0.05$.
4. If all of these three components survive for less than five hours, then the p-value of the test is 0.001 .

किसी वैद्युत घटक का जीवनकाल (घंटों में) चरघातांकी रूप से बंटित है जिसका माध्य $\theta > 0$ है। $H_1 : \theta = \frac{5}{\ln(2)}$ के विरुद्ध $H_0 : \theta = \frac{5}{\ln(10)-\ln(9)}$ का परीक्षण करने के लिए, ऐसे तीन घटक यादृच्छिकत: चुने जाते हैं। मानें कि हम निराकरणीय परिकल्पना H_0 को तब और केवल तब निराकृत करते हैं जब तीन में से दो या अधिक घटक पाँच घंटे या उससे कम में खराब हो जाते हैं। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. परीक्षण का आमाप 0.01 है।
2. परीक्षण की शक्ति 0.5 है।
3. $\alpha = 0.05$ स्तर पर परीक्षण अनभिनत है।
4. यदि तीनों घटक पांच घंटे से कम में खराब जाते हैं, तब परीक्षण का p-मान 0.001 है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

111 706591

Let $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ be a random sample of size 10 from a Bernoulli distribution with success probability $\frac{1}{1+e^{\theta}}$, where $\theta \in \mathbb{R}$ is an unknown parameter. If $M = \sum_{i=1}^{10} X_i$, then which of the following statements are true?

1. For $M = 0$, the maximum likelihood estimate of θ is equal to 0.
2. For $M = 10$, the maximum likelihood estimate of θ does not exist.
3. The maximum likelihood estimator of θ exists for $M \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ and is equal to $\ln\left(\frac{10}{M} - 1\right)$.
4. The method of moments estimator of θ exists and is equal to $\frac{M}{10}$.

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ ऐसे बर्नूली बंटन का आकार 10 का यादृच्छिक प्रतिदर्श है जिसकी सफलता की प्रायिकता $\frac{1}{1+e^{\theta}}$, जहाँ $\theta \in \mathbb{R}$ अज्ञात प्राचल है। यदि $M = \sum_{i=1}^{10} X_i$ तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $M = 0$ के लिए θ का अधिकतम संभाविता आकलन 0 के बराबर है।
2. $M = 10$ के लिए θ के अधिकतम संभाविता आकलन का अस्तित्व है ही नहीं।
3. $M \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ के लिए θ के अधिकतम संभाविता आकलक का अस्तित्व है, तथा वह $\ln\left(\frac{10}{M} - 1\right)$ के बराबर है।
4. θ की आघूर्ण विधि आकलक का अस्तित्व है तथा वह $\frac{M}{10}$ के बराबर है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

112 706592

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from $U(\theta, \theta+1)$ distribution, where $\theta \in \mathbb{R}$ is an unknown parameter. If $T_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, n = 1, 2, \ldots$, then which of the following statements are true?

1. T_n is a consistent estimator of θ .
2. T_n is an unbiased estimator of θ .
3. $T_n - 1$ is a consistent estimator of θ .
4. $\lim_{n\to\infty} E_\theta(T_n) = \theta + 1, \ \forall\theta \in \mathbb{R}$

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ आकार n का यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जिसका बंटन $U(\theta, \theta+1)$ है, जहां $\theta \in \mathbb{R}$ अज्ञात प्राचल है। यदि $T_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, n = 1, 2, \ldots$, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. θ का एक अविरोधी आकलक T_n है।
2. θ का एक अनभिनत आकलक T_n है।
3. θ का एक अविरोधी आकलक $T_n - 1$ है।
4. $\lim_{n\to\infty} E_\theta(T_n) = \theta + 1, \ \forall\theta \in \mathbb{R}$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

113 706593

Let $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ be a random sample of size n from a bivariate distribution $F_{X,Y}$ with absolutely continuous marginal distribution functions F_X and F_Y of X and Y, respectively. Let r_S be the Spearman's rank correlation coefficient defined with ranks of X_i and ranks of $Y_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$. Then, which of the following statements are true?

1. If $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \forall(x,y)$, then $E(r_S) = 0, \forall n \geq 2$.
2. If $n = 3$, then $P(r_S = 0) = 0$.
3. If $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \forall(x,y)$, then $\text{Var}(r_S) = \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$.
4. If $n = 4$ and $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \forall(x,y)$, then $P(r_S = 0) = \frac{1}{24}$.

माने कि आकार n का यादृच्छिक प्रतिदर्श $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$, ऐसे द्विचर बंटन $F_{X,Y}$ से लिया गया है, जिसके लिए X तथा Y के निरपेक्षत: संतत उपांत बंटन फलन क्रमश: F_X तथा F_Y हैं। मानें कि X_i की कोटि तथा Y_i की कोटि $(i = 1, 2, \ldots, n)$ के स्पियरमैन कोटि सहसंबंध गुणांक को r_S परिभाषित करते है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \forall(x, y)$, तब $E(r_S) = 0, \forall n \geq 2$ है।
2. यदि $n = 3$, तब $P(r_S = 0) = 0$ है।
3. यदि $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \forall(x, y)$, तब $\text{Var}(r_S) = \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$ है।
4. यदि $n = 4$ तथा $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \forall(x, y)$, तब $P(r_S = 0) = \frac{1}{24}$ है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

114 706594

Let $X_1, X_2, \ldots, X_m$ and $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ be two mutually independent random samples from populations with absolutely continuous distribution functions F_X and F_Y, respectively. For $N = m + n$, define $T_N = \sum_{i=1}^{N} iZ_i$ where $Z_i = 1$ if the i-th observation in the combined ordered arrangement of N observations is from F_X; and $Z_i = 0$, otherwise. Then, which of the following statements are true?

1. If $F_X(x) = F_Y(x) \; \forall \; x$, then $E(T_N) = \frac{m(N+1)}{2}$.
2. If $F_X(x) = F_Y(x) \; \forall \; x$, then $\text{Var}(T_N) = \frac{mn(N+1)}{24}$.
3. If $F_X(x) = F_Y(x) \; \forall \; x$, then the distribution of T_N is symmetric about $\frac{mn}{2}$.
4. The minimum and maximum possible values of T_N are $\frac{m(m+1)}{2}$ and $\frac{N(N+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}$, respectively.

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_m$ तथा $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ क्रमश: निरपेक्षत: संतत बंटन फलन F_X व F_Y की समष्टि में से दो अन्योन्यत: स्वतंत्र यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं। $N = m + n$ के लिए $T_N = \sum_{i=1}^{N} iZ_i$ परिभाषित करें जहां $Z_i = 1$ है यदि N पर्यवेक्षणों के संयुक्त क्रमित विन्यास में से i-th पर्यवेक्षण F_X में से है; अन्यथा $Z_i = 0$ है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि $F_X(x) = F_Y(x) \; \forall \; x$, तब $E(T_N) = \frac{m(N+1)}{2}$ है।
2. यदि $F_X(x) = F_Y(x) \; \forall \; x$, तब $\text{Var}(T_N) = \frac{mn(N+1)}{24}$ है।
3. यदि $F_X(x) = F_Y(x) \; \forall \; x$, तब T_N का बंटन $\frac{mn}{2}$ के सापेक्ष सममित है।
4. T_N के न्यूनतम तथा अधिकतम मान क्रमश: $\frac{m(m+1)}{2}$ तथा $\frac{N(N+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}$ हैं।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

115 706595

Consider a linear model

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i + \epsilon_i,\ 1 \le i \le n,$$

where the errors ϵ_i's are uncorrelated with zero mean and finite variance $\sigma^2 > 0$. Then, which of the following statements are true?

1. Every linear function of $\beta_i,\ 1 \le i \le n$, is not estimable.
2. Every $\beta_i,\ 1 \le i \le n$, has infinitely many linear unbiased estimators, but a unique best linear unbiased estimator.
3. Each $\beta_i,\ 1 \le i \le n$, has only one linear unbiased estimator.
4. $Y_2 - Y_1$ is the best linear unbiased estimator of β_2 .

निम्न रैखिक मॉडल पर विचार करें

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i + \epsilon_i,\ 1 \le i \le n,$$

जहां त्रुटियां ϵ_i's असहसंबद्ध है, व जिनका माध्य शून्य तथा परिमित प्रसरण $\sigma^2 > 0$ हैं। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\beta_i,\ 1 \le i \le n$ का प्रत्येक रैखिक फलन आकलनीय नहीं है।
2. प्रत्येक $\beta_i,\ 1 \le i \le n$ के अनंत रैखिक अनभिनत आकलक है, लेकिन अद्वितीय सर्वश्रेष्ठ रैखिक अनभिनत आकलक है।
3. प्रत्येक $\beta_i,\ 1 \le i \le n$ का केवल एक रैखिक अनभिनत आकलक है।
4. β_2 का सर्वश्रेष्ठ रैखिक अनभिनत आकलक $Y_2 - Y_1$ है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

116 706596

Consider a linear regression model $Y = X\beta + \epsilon$, with r regressors and an intercept. Random error $\epsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ and X has full column rank. Here I_n denotes the identity matrix of order n. Regression coefficients are estimated by the least squares estimation method. Let $\hat{\sigma}^2$ and $\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}$, respectively, be the mean squares residuals and the maximum likelihood estimator of σ^2. Then, which of the following statements are true?

1. $\text{MSE}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) < \text{MSE}(\hat{\sigma}^2)$ if $r = 3, n = 12$
2. $\text{Var}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) < \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ if $1 \le r \le n-2, n \ge 3$
3. $\text{Var}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) > \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ if $1 \le r \le 6, n \ge 12$
4. $\text{MSE}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) > \text{MSE}(\hat{\sigma}^2)$ if $r = 6, n = 12$

एक रैखिक समाश्रयण मॉडल $Y = X\beta + \epsilon$ पर विचार करें जिसके r समाश्रयी हैं तथा एक अंत:खंड है। यादृच्छिक त्रुटि $\epsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ है तथा X की स्तंभ कोटि अधिकतम है। यहां I_n, कोटि n का तत्समक आव्यूह इंगित करता है। समाश्रयण गुणांक का आकलन न्यूनतम वर्ग आकलन विधि से करते हैं। $\hat{\sigma}^2$ तथा $\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}$ को क्रमश: अवशिष्ठ वर्ग माध्य तथा σ^2 का अधिकतम संभाविता आकलक मानें। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\text{MSE}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) < \text{MSE}(\hat{\sigma}^2)$ यदि $r = 3, n = 12$
2. $\text{Var}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) < \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ यदि $1 \le r \le n-2, n \ge 3$
3. $\text{Var}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) > \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ यदि $1 \le r \le 6, n \ge 12$
4. $\text{MSE}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) > \text{MSE}(\hat{\sigma}^2)$ यदि $r = 6, n = 12$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

117 706597

If $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)$, then which of the following statements are true?

1. The distribution of the second principal component is normal with mean 0 and variance 2 .
2. The variance of the first principal component is 4 .
3. The first principal component explains more than 70% of the total variance.
4. The correlation coefficient between the first and the second principal components is 0 .

यदि $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)$, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. द्वितीय प्रमुख घटक का बंटन प्रसामान्य है, व जिसका माध्य 0 तथा प्रसरण 2 है।
2. प्रथम प्रमुख घटक का प्रसरण 4 है।
3. प्रथम प्रमुख घटक 70% से अधिक कुल प्रसरण की व्याख्या कर देता है।
4. प्रथम तथा द्वितीय घटकों के मध्य सहसंबंध गुणांक 0 है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

118 706598

Consider a probability proportional to size without replacement sample involving two draws from a population of $N\ (>6)$ units with normed size measures p_i's $(p_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N; \sum_{i=1}^{N} p_i = 1)$. Then, which of the following statements are true?

1. $P(\text{Unit 1 is included in the sample}) = p_1$
2. $P(\text{Unit 1 and Unit 3 are included in the sample}) = p_1 p_3 \left[\frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{1-p_3}\right]$
3. $P(\text{Unit 1, Unit 3 and Unit 5 are included in the sample})$
$$= p_1 p_3 p_5 \left[\frac{1}{(1-p_1)(1-p_3)} + \frac{1}{(1-p_3)(1-p_5)} + \frac{1}{(1-p_5)(1-p_1)}\right]$$
4. Expected number of distinct units in the sample is $2\left[1 - \sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^2\right]$

बिना प्रतिदर्श प्रतिस्थापन के आकार के समानुपाती प्रायिकता के अंतर्गत, मानकित आकार मापों p_i's $(p_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N; \sum_{i=1}^{N} p_i = 1)$ वाली $N\ (>6)$ यूनिट की समष्टि में से, दो बार यूनिट निकाले जाते हैं। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $P($यूनिट 1 प्रतिदर्श में सम्मिलित है$) = p_1$
2. $P($यूनिट 1 तथा यूनिट 3 प्रतिदर्श में सम्मिलित हैं$) = p_1 p_3 \left[\frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{1-p_3}\right]$
3. $P($यूनिट 1, यूनिट 3 तथा यूनिट 5 प्रतिदर्श में सम्मिलित हैं$) = p_1 p_3 p_5 \left[\frac{1}{(1-p_1)(1-p_3)} + \frac{1}{(1-p_3)(1-p_5)} + \frac{1}{(1-p_5)(1-p_1)}\right]$
4. प्रतिदर्श में भिन्न इकाइयों की प्रत्याशित संख्या $2\left[1 - \sum_{i=1}^{N}(1-p_i)^2\right]$ है।

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

A4: 4

4

Multiple Response

119 706599

Consider a manufacturing unit producing three-component series systems, where component's lifetimes are independent and identically distributed random variables with hazard function

$$h(x) = \begin{cases} \lambda & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Here, $\lambda > 0$ is an unknown parameter. Let X_1, X_2, X_3 be a random sample of size 3 on lifetimes of systems produced by the manufacturing unit. Let $\theta = P_\lambda\left(X_1 > \frac{1}{2}\right)$. If $\widehat{\theta}$ is the maximum likelihood estimate of θ based on the realization $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{3}$ of the random sample, then which of the following statements are true?

1. $\widehat{\theta} \in (0.0,\ 0.2)$
2. $\widehat{\theta} \in (0.1,\ 0.3)$
3. $\widehat{\theta} \in (0.2,\ 0.4)$
4. $\widehat{\theta} \in (0.3,\ 0.5)$

एक उत्पादन इकाई पर विचार करें जो त्रिघटक श्रेणी तंत्र बनाती है, जहां घटकों के जीवनकाल स्वतंत्र तथा सर्वथा समबंटित यादृच्छिक चर हैं जिनका संकट फलन निम्न है

$$h(x) = \begin{cases} \lambda & \text{यदि } x > 0 \\ 0 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

यहां $\lambda > 0$ एक अज्ञात प्राचल है। मानें कि उत्पादन इकाई द्वारा निर्मित तंत्रों के जीवन कालों का X_1, X_2, X_3 आकार 3 का यादृच्छिक प्रतिदर्श है। मानें कि $\theta = P_\lambda\left(X_1 > \frac{1}{2}\right)$ है। यदि $\widehat{\theta}$ यादृच्छिक प्रतिदर्श के अवलोकन $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{3}$ के आधार पर θ का अधिकतम संभाविता आकलन है, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\widehat{\theta} \in (0.0,\ 0.2)$
2. $\widehat{\theta} \in (0.1,\ 0.3)$
3. $\widehat{\theta} \in (0.2,\ 0.4)$
4. $\widehat{\theta} \in (0.3,\ 0.5)$

A1: 1

1

A2: 2

2

A3: 3

3

		A4:	4 4

Multiple Response

120	706600	

Consider maximizing the objective function

$$P = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 5 \\ &x_2 + x_3 \le 2 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Then, which of the following statements are true?

1. $(5,\ 0,\ 1)$ is a corner point.
2. $(4,\ 1,\ 1)$ is an optimal point.
3. The optimal solution is 9 .
4. The optimal solution is 10 .

उद्देश्य फलन

$$P = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

के निम्न प्रतिबंधों के साथ अधिकतमीकरण पर विचार करें

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 5 \\ &x_2 + x_3 \le 2 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $(5, 0, 1)$ एक कोने का बिंदु है।
2. $(4, 1, 1)$ एक इष्टतम बिन्दु है।
3. इष्टतम हल 9 है।
4. इष्टतम हल 10 है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4